

# Kausaalisuudesta tilastollisissa malleissa - Pearl'n kausaaliteoria ja rakenneyhtälömallien teoria

Pro gradu -tutkielma  
Taija Alatalo  
Helsingin yliopisto  
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta  
Matematiikan ja tilastotieteen osasto  
Tilastotiede  
Huhtikuu 2019

Tiedekunta — Fakultet — Faculty		Osasto — Avdelning — Department	
Matemaattis-luonnontieteellinen		Matematiikan ja tilastotieteen osasto	
Tekijä — Författare — Author			
Taija Alatalo			
Työn nimi — Arbetets titel — Title			
Kausaalisuudesta tilastollisissa malleissa: Pearlin kausaaliteoria ja rakenneyhtälömallien teoria			
Oppiaine — Läroämne — Subject			
Tilastotiede			
Työn laji — Arbetets art — Level		Aika — Datum — Month and year	
Pro gradu -tutkielma		Huhtikuu 2019	
		Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages	
		44 s.	
Tiivistelmä — Referat — Abstract			
<p>Kausaalisuus eli syy-seuraussuhteet tarkoittavat tapahtumien välisiä yhteyksiä, joissa toiset tapahtumat aiheuttavat toisia tapahtumia. Tällaisten kausaalipäätelmien tekeminen on keskeistä soveltavassa tilastotieteessä, sillä monesti tutkimuksissa ei olla kiinnostuneita pelkästään muuttujien välisistä korrelaatioista vaan nimenomaan syy-seuraussuhteista. Tilastotieteen piiriin onkin kehittynyt useita, eri tieteenaloilla sovellettavia kausaalipäätelyn suuntauksia, jotka korostavat kausaalisuuden eri osa-alueita.</p> <p>Tässä tutkielmassa esitellään kausaalitutkimuksen suuntauksista Pearlin kausaaliteoriaa ja rakenneyhtälömallien teoriaa. Pearlin kausaaliteoria tarjoaa kattavan matemaattisen perustan kausaaliyhteyksien analysoinnille. Se pohjautuu graafiteoriaan, ja siinä keskeisessä osassa ovat suunnatut silmukattomat graafit, joiden avulla kausaalisuhteet esitetään. Keskeisenä mielenkiinnon kohteena on kausaalivaikutusten määrittäminen. Sen selvittämiseksi, onko kausaalivaikutus yksiselitteisesti määriteltävissä eli identifioituissa, on olemassa käteviä graafisia menetelmiä, joita voidaan soveltaa suoraan kausaaligraafiin ilman aineistoa.</p> <p>Rakenneyhtälömallit on kokoelma tilastollisia menetelmiä, joilla voidaan tutkia monimutkaisia, useiden muuttujien välisiä kausaalirakenteita. Rakenneyhtälömalleissa kausaaliyhteydet kuvataan rakenneyhtälöinä, jotka voidaan esittää havainnollisesti polkukaavioiden avulla. Tässä tutkielmassa keskitytään yleiseen rakenneyhtälömalliin, joka voidaan jakaa mittaus- ja rakenneosaan. Mittausmalli määrittää havaittujen ja ei-havaittujen muuttujien väliset yhteydet, kun taas rakennemalli määrittelee ei-havaittujen muuttujien keskinäiset yhteydet. Rakenneyhtälömallien teoriaa havainnollistetaan empiirisellä esimerkillä, jossa tutkitaan kognitiivisten prosessien eli ajattelutapojen vaikutusta työtyytyväisyyteen.</p> <p>Pearlin kausaalimallit ovat tunnettuja ja paljon sovellettuja epidemiologian puolella, kun taas käyttäytymis- ja yhteiskuntatieteiden puolella rakenneyhtälömallit ovat hallinneet tutkimuskenttää. Rakenneyhtälömalleista on puuttunut matemaattinen kieli, jolla rakenneyhtälöissä esiintyvää kausaali-informaatiota voitaisiin käsitellä. Pearlin kausaaliteoria tarjoaa tämän kielen rakenneyhtälömallien kausaaliväittämien tueksi.</p>			
Avainsanat — Nyckelord — Keywords			
kausaalisuus, Pearlin kausaaliteoria, rakenneyhtälömallit, kognitiiviset prosessit, työtyytyväisyys			
Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited			
Kumpulan tiedekirjasto			
Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information			

# Sisältö

<b>Johdanto</b>	<b>2</b>
<b>1 Todennäköisyysteorian ja graafiteorian perusteita</b>	<b>4</b>
1.1 Todennäköisyysteorian perusteita . . . . .	4
1.2 Graafiteorian perusteita . . . . .	6
<b>2 Pearlin kausaaliteoriasta</b>	<b>8</b>
2.1 Historiaa . . . . .	8
2.2 Kausaalimalli . . . . .	9
2.3 Kausaalivaikutus . . . . .	11
2.4 Kausaalivaikutuksen graafinen identifointi . . . . .	12
2.4.1 Takaovikriteeri . . . . .	12
2.4.2 Kausaalilaskenta . . . . .	14
<b>3 Rakenneyhtälömallien teoriasta</b>	<b>18</b>
3.1 Historiaa . . . . .	18
3.2 Peruskäsitteitä . . . . .	19
3.3 Yleinen rakenneyhtälömalli . . . . .	21
3.4 Mallin identifioituvuus ja estimointi . . . . .	24
3.5 Mallin sopivuus . . . . .	26
3.6 Mallin muokkaaminen . . . . .	28
<b>4 Empiirinen esimerkki</b>	<b>29</b>
4.1 Johdanto . . . . .	29
4.2 Malli matriisimerkinnöin . . . . .	31
4.3 Hypoteesit . . . . .	33
4.4 Mallin sovittaminen . . . . .	34
4.5 Johtopäätökset . . . . .	39
<b>5 Yhteenveto</b>	<b>41</b>
<b>Lähdeluettelo</b>	<b>42</b>

# Johdanto

Kausaalisuus eli syy-seuraussuhteet tarkoittavat tapahtumien välisiä yhteyksiä, joissa toiset tapahtumat (syyt) aiheuttavat toisia tapahtumia (seuraukset). Tällaisten kausaalipäätelmien tekeminen on keskeistä soveltavassa tilastotieteessä, sillä monesti tutkimuksissa ei olla kiinnostuneita ainoastaan ilmiöiden välisistä yhteyksistä eli korrelaatioista vaan nimenomaan syy-seuraussuhteista. Esimerkiksi voidaan haluta arvioida ylipainon vaikutusta sydän- ja verisuonitauteihin tai vaikkapa koulutuksen vaikutusta palkkoihin. Tilastotieteen piiriin onkin kehittynyt useita, eri tieteenaloilla sovellettavia kausaalipäätelyn suuntauksia, jotka korostavat kausaalisuuden eri osaluokkia.

Rakenneyhtälömallit (structural equation models, SEM) on kokoelma tilastollisia menetelmiä, joilla voidaan tutkia monimutkaisia, useiden muuttujien välisiä kausaalirakenteita. Rakenneyhtälömalleja onkin totuttu soveltamaan erityisesti käyttäytymis- ja yhteiskuntatieteiden puolella, sillä monesti näillä aloilla tutkittavat kausaaliyhteydet eivät ole yksinkertaisia. Rakenneyhtälömalleissa kausaaliyhteydet kuvataan rakenneyhtälöinä, jotka voidaan esittää havainnollisesti polkukaavioiden avulla. Rakenneyhtälömalleissa kausaalipäätely nojaa vahvaan substanssiteoriaan, joka on edellytys rakenneyhtälömallien laadinnassa. Näin ollen rakenneyhtälömalleja ei voida soveltaa aloilla, joilla teoria on epätarkkaa tai puutteellista. (Byrne 2012, 3; Kline 2015, 9; Pearl 2009, 133.)

Potentiaalisten lopputulosten malli (potential outcomes model, POM) tai Neuman–Rubin -malli perustuu havaittuun todellisuuteen nähden vaihtoehtoisten tilanteiden eli kontrafaktuaalien (counterfactuals) vertailuun. Kontrafaktuaali on hypoteettinen ehtolause, joka ilmaisee, mitä olisi tapahtunut tiettyjen ehtojen vallitessa, esimerkiksi ”en olisi myöhästynyt töistä, jos olisin muistanut asettaa herätyksen”. Potentiaalisten lopputulosten mallia käytetään yleensä satunnaistetuissa kliinisissä tutkimuksissa. (Kline 2016, 18–19.)

Judea Pearl in kausaalimallit (structural causal model, SCM) yhdistävät rakenneyhtälömallit ja potentiaalisten lopputulosten mallin yhdeksi kattavaksi kausaalipäätelyn säännöstökseksi. Itse asiassa Galles ja Pearl (1998) ovat osoittaneet, että SEM ja POM ovat kausaalipäätelyn suhteen ekvivalentteja keskenään. Pearl in kausaaliteoriassa keskeisessä osassa ovat suunnatut graafit, joiden avulla kausaaliyhteydet esitetään. Toisin kuin rakenneyhtälömallissa Pearl in kausaaliteoria mahdollistaa kausaaliyhteyksien identifioinnin suunnatuista graafeista ilman dataa. Näin ollen tutkija voi testata oletettua kausaalirakennetta jo ennen datan keräämistä. (Kline 2016, 19–20; Pearl

2009.)

Pearlin kausaalimallit ovat tunnettuja ja paljon sovellettuja epidemiologian puolella, kun taas käyttäytymis- ja yhteiskuntatieteiden puolella rakenneyhtälömallit ovat hallinneet tutkimuskenttää. (Kline 2016, 164–165; Pearl 2009, 133.) Pearlin mielestä käyttäytymis- ja yhteiskuntatieteissä on keskitytty liiaksi rakenneyhtälömallien sovittamiseen liittyviin kysymyksiin, ja näin on sivuutettu rakenneyhtälömallien potentiaali kausaalisen päättelyn osalta (Pearl 2009, 170). Hiljattain Pearlin ajatuksia on alettu tuomaan esille myös rakenneyhtälömallien piirissä, sillä Pearlin kausaaliteoria antaa tukea rakenneyhtälömallien kausaalihypoteeseihin (Hayduk, Cummings, Skratkotter, Nimmo, Grygoryev, Dosman, Gillespie, Pazderka-Robinson & Boadu 2003; Kline 2016). Esimerkiksi Kline (2016) on yksi ensimmäisistä, joka nostaa Pearlin kausaalimallit vahvasti esille käyttäytymis- ja yhteiskuntatieteilijöille suunnatussa, rakenneyhtälömalleja käsittelevässä kirjassaan.

Tässä tutkielmassa esitellään kausaalimallinnuksen menetelmistä rakenneyhtälömalleja ja Pearlin kausaalimalleja. Pearlin kausaaliteoria pohjautuu todennäköisyys- ja graafiteoriaan, joten näiden perusteita käydään läpi ensimmäisessä luvussa. Toisessa luvussa päästään käsiksi Pearlin kausaaliteoriaan. Ensin tutustutaan Pearlin kausaaliteorian kehittymiseen vaikuttaneisiin seikkoihin. Sitten esitetään Pearlin määritelmä kausaalimallille. Tämän jälkeen tarkastellaan kausaalivaikutusta ja sen identifioituvuutta. Lopuksi kuvataan käteviä, graafisia menetelmiä kausaalivaikutuksen identifiointiin.

Kolmannessa luvussa perehdytään rakenneyhtälömallien teoriaan yleisellä tasolla. Aluksi esitellään rakenneyhtälömallien kehitystä ja peruskäsitteitä. Seuraavaksi määritetään yleinen rakenneyhtälömalli käyttäen Jöreskogin luomia LISREL-notaatioita. Tästä siirrytään rakenneyhtälömallien sovittamiseen liittyviin teemoihin. Käydään läpi muun muassa estimointimenetelmiä, mallin sopivuuden arvioinnissa käytettäviä kriteereitä ja mahdollista mallin muokkausta. Neljännessä luvussa havainnollistetaan kolmannessa luvussa esiteltyjä aihealueita empiirisen esimerkin avulla.

# 1 Todennäköisyysteorian ja graafiteorian perusteita

Tässä luvussa esitellään lyhyesti keskeisimpiä todennäköisyys- ja graafiteorian käsitteitä. Todennäköisyysteorian perusteiden ymmärtäminen on tärkeää kausaalipäätelyssä, sillä monet kausaaliväittämät ovat epävarmoja, ja todennäköisyyden käsite on tapa ilmaista epävarmoja väittämiä. Graafiteoria taas tarjoaa hyödyllisen matemaattisen kielen, jolla voidaan esittää kausalisuhteita. (Pearl, Glymour & Jewell 2016, 7 ja 24.)

## 1.1 Todennäköisyysteorian perusteita

Kausaalipäätelyn kannalta keskeisiä käsitteitä ovat muun muassa ehdollinen todennäköisyys, kokonaistodennäköisyys sekä tapahtumien riippuvuus ja riippumattomuus. Aloitetaan todennäköisyyden määritelmällä.

**Määritelmä 1.1.** Olkoon  $\Omega$  perusjoukko ja  $A$  tapahtuma perusjoukossa.  $P$  on *todennäköisyys* tai *todennäköisyyshammas*, jos

1.  $P(A) \geq 0$  kaikille  $A \subset \Omega$ ,
2.  $P(\emptyset) = 0$  ja  $P(\Omega) = 1$ , ja
3.  $P(\cup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)$ , kun  $A_1, A_2, \dots$  ovat erillisiä. Tätä kutsutaan *additiivisuudeksi*. (Koistinen 2013, 5.)

Todennäköisyyden määritelmän kohdassa 3 annettiin tapahtuman  $A$  todennäköisyydelle laskukaava. Tapahtumaan  $A$  voi kuitenkin vaikuttaa toinen tapahtuma  $B$ , jolloin se tulee ottaa huomioon tapahtuman  $A$  todennäköisyyttä määritettäessä. Tätä kutsutaan ehdolliseksi todennäköisyydeksi.

**Määritelmä 1.2.** Tapahtuman  $A$  *ehdollinen todennäköisyys ehdolla*  $B$  määritellään kaavalla

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{jossa } P(B) > 0.$$

Kääntämällä ehdollisen todennäköisyyden yhtälö saadaan erittäin hyödyllinen kaava nimeltään todennäköisyyksien *kertolaskusääntö*

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B). \quad (1.1)$$

(Koistinen 2013, 10–11.)

Tapahtumat  $A$  ja  $B$  voivat olla keskenään joko riippuvia tai riippumattomia.

**Määritelmä 1.3.** Tapahtumat  $A$  ja  $B$  ovat *riippumattomia*, jos

$$P(A \cap B) = P(A)P(B),$$

ja siitä käytetään merkintää  $A \perp B$ . Jos tämä yhtälö ei päde, niin muuttujat  $A$  ja  $B$  ovat *riippuvia*, ja sitä merkitään  $A \not\perp B$ . (Koistinen 2013, 12.)

**Lause 1.4.** Jos  $P(B) > 0$ , niin tapahtumat  $A$  ja  $B$  ovat riippumattomia, jos ja vain jos  $A$ :n ehdollinen todennäköisyys ehdolla  $B$  on  $A$ :n todennäköisyys, eli

$$A \perp B \iff P(A | B) = P(A).$$

Toisin sanoen tieto  $B$ :n todennäköisyydestä ei vaikuta  $A$ :n todennäköisyyteen. (Koistinen 2013, 13.)

Siirrytään seuraavaksi kokonaistodennäköisyyden käsitteen pariin. Tarkastellaan tapahtumaa  $A$  ja sen perusjoukon  $\Omega$  ositusta  $B_1, \dots, B_n$ . Ositukselle pätee kaksi ehtoa: ensinnäkin ositukset ovat erillisiä, eli  $B_i \cap B_j = \emptyset$ , kun  $i \neq j$ , ja toiseksi ne peittävät kokonaan perusjoukkonsa, eli  $B_1 \cap \dots \cap B_n = \Omega$ . Joukko  $A$  voidaan esittää leikkaamalla se kullakin ositteella  $B_i$ , eli

$$A = (A \cap B_1) \cup \dots \cup (A \cap B_n).$$

Joukon  $A$  ositteet  $(A \cap B_1), \dots, (A \cap B_n)$  ovat siis erillisiä, joten kertolaskusäännön 1.1 ja additiivisuuden nojalla  $A$ :n todennäköisyys voidaan esittää kokonaistodennäköisyyden kaavalla

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A | B_i)P(B_i).$$

Kokonaistodennäköisyyden kaavaa muokkaamalla saadaan sille yleinen muoto. (Koistinen 2013, 14.)

**Lause 1.5.**  $A$ :n ehdollinen kokonaistodennäköisyys ehdolla  $K$  saadaan kaavalla

$$P(A | K) = \sum_{i=1}^n P(A | B_i, K)P(B_i | K) \quad (1.2)$$

(Pearl 2009, 5–6).

## 1.2 Graafiteorian perusteita

Graafit koostuvat solmuista ja niitä yhdistävistä särmistä. Särmät voivat olla joko suuntaamattomia tai suunnattuja. Suuntaamattomia särkeä merkitään suoralla ja suunnattuja särkeä nuolilla. Solmua, josta suunnattu särmä alkaa, kutsutaan vanhemmaksi ja solmua, johon suunnattu särmä päättyy, kutsutaan lapseksi. (Pearl ym. 2016, 25.)

Polku on yhtenäinen reitti, joka kulkee graafin särkeä pitkin solmusta toiseen. Polkua kutsutaan suunnatuksi poluksi, jos sen kaikki särkeä ovat suunnattuja. Jos kahta solmua yhdistää suunnattu polku, niin ensimmäinen solmu on kaikkien polun solmujen esivanhempi, ja kääntäen jokainen polun solmu on ensimmäisen solmun jälkeläinen. (Pearl ym. 2016, 25.)

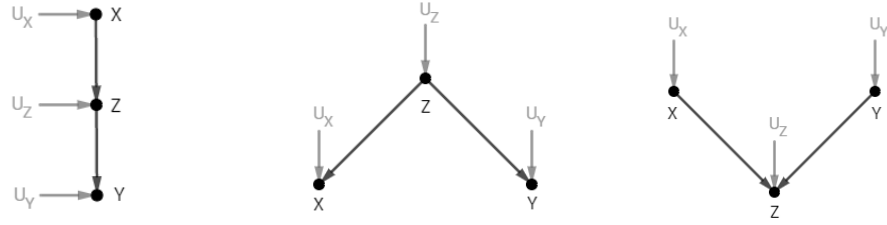
Graafia kutsutaan silmukalliseksi, kun suunnatussa graafissa solmu sisältää polun itseensä. Suunnattua graafia, joka ei sisällä yhtään silmukkaa, kutsutaan silmukattomaksi. Kausaalilaskennassa keskitytään yleensä suunnattuihin silmukattomiin graafeihin. (Pearl ym. 2016, 25–27.)

Yksinkertaisimmillaan graafit koostuvat kuvan 1 kaltaisista kolmen muuttujan ketjuista, haarukoista tai törmäyksistä. Ketjuksi (chain) kutsutaan selasta graafia, jonka särkeä toinen osoittaa keskimmäiseen solmuun ja toinen keskimmäisestä pois ( $X \rightarrow Z \rightarrow Y$ ). Haarukaksi (fork) kutsutaan graafia, jonka särkeä molemmat lähtevät keskimmäisestä solmusta ( $X \leftarrow Z \rightarrow Y$ ). Haarukassa keskimmäistä muuttujaa kutsutaan kahden muun muuttujan (ja niiden jälkeläisten) yhteiseksi syyksi. Törmäykseksi tai käänteiseksi haarukaksi (collider) kutsutaan graafia, jonka molemmat särkeä osoittavat keskimmäiseen solmuun ( $X \rightarrow Z \leftarrow Y$ ). Keskimmäistä solmua voidaan kutsua törmäyssolmuksi, ja se on kahden muun muuttujan (ja niiden esivanhempien) yhteinen seuraus. (Pearl ym. 2016, 38–40.)

Graafia katsomalla voidaan tehdä päätelmiä muuttujien riippumattomuudesta tai riippuvuudesta. Ketjuissa, haarukoissa ja törmäyksissä pätevät seuraavanlaiset ehdollisen riippumattomuuden säännöt.

1. Ehdollinen riippumattomuus ketjuissa: Kaksi muuttujaa  $X$  ja  $Y$  ovat ehdollisesti riippumattomia annetusta  $Z$ , jos muuttujien  $X$  ja  $Y$  välillä on täsmälleen yksi yhdensuuntainen polku, ja  $Z$  on mikä tahansa muuttujajoukko, joka leikkaa tämän polun. Tässä muuttujien  $X$ ,  $Y$  ja  $Z$  virhetermit oletetaan toisistaan riippumattomiksi.
2. Ehdollinen riippumattomuus haarukoissa: Jos muuttuja  $Z$  on yhteinen syy muuttujille  $X$  ja  $Y$  sekä muuttujien  $X$  ja  $Y$  välillä on vain yksi polku, niin  $X$  ja  $Y$  ovat ehdollisesti riippumattomia ehdolla  $Z$ .
3. Ehdollinen todennäköisyys törmäyksissä: Jos muuttuja  $Z$  on muuttu-





- (a) Ketju:  $X \not\perp\!\!\!\perp Y, X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$       (b) Haarukka:  $X \not\perp\!\!\!\perp Y, X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$       (c) Törmäys:  $X \perp\!\!\!\perp Y, X \not\perp\!\!\!\perp Y \mid Z$

Kuva 1: Esimerkit kolmen muuttujan ketjusta, haarukasta ja törmäyksestä sekä niissä vallitsevat riippuvuudet ja riippumattomuudet.

jien  $X$  ja  $Y$  törmäyssolmu sekä muuttujien  $X$  ja  $Y$  välillä on vain yksi polku, niin  $X$  ja  $Y$  ovat ehdoitta riippumattomia, mutta ehdollisesti riippuvia ehdolla  $Z$  tai millä tahansa  $Z$ :n jälkeläisellä. (Pearl ym. 2016, 39–44.)

Yleensä graafit eivät ole niin yksinkertaisia kuin edellä ja sisällä vain yhtä polkua muuttujien välillä. Näin ollen tarvitaan tapa, jolla määritetään riippuvuudet ja riippumattomuudet monimutkaisemmista graafeista. Tähän käytetään d-erottelua tai d-separaatiota, joka yhdistää edellä esiteltyt kolme ehdollisen todennäisyyden sääntöä. (Pearl ym. 2016, 45–46.)

**Määritelmä 1.6.** Polku  $p$  on tukittu solmujoukolla  $Z$ , jos ja vain jos

1.  $p$  sisältää ketjun  $A \rightarrow B \rightarrow C$  tai haarukan  $A \leftarrow B \rightarrow C$ , joissa keskimmainen solmu  $B$  kuuluu solmujoukkoon  $Z$ , tai
2.  $p$  sisältää törmäyksen  $A \rightarrow B \leftarrow C$ , jossa keskimmainen solmu  $B$  tai  $B$ :n jälkeläinen ei kuulu solmujoukkoon  $Z$ .

Jos  $Z$  tukkii jokaisen polun kahden solmun  $X$  ja  $Y$  väliltä, niin  $X$  ja  $Y$  ovat *d-erotettuja* ehdolla  $Z$ . Jos  $X$  ja  $Y$  ovat d-erotettuja ehdolla  $Z$ , niin  $X$  ja  $Y$  ovat riippumattomia ehdolla  $Z$ . (Pearl ym. 2016, 46–47.)

## 2 Pearlin kausaaliteoriasta

Judea Pearlin kausaaliteoria (structural causal model, SCM) tarjoaa kattavan matemaattisen perustan kausaaliyhteyksien analysoinnille. Se pohjautuu graafiteoriaan, ja siinä keskeisessä osassa ovat suunnatut silmukattomat graafit, joiden avulla kausaaliyhteydet esitetään. Pearlin kausaalimalleja on totuttu soveltamaan epidemiologian puolella. (Kline 2016, 164–165; Pearl 2009.)

Tässä luvussa on tarkoitus tutustua Pearlin kausaaliteorian keskeisiin osiin. Aluksi kerrotaan hiukan kausaalipäättelyn kehityksen vaiheista. Seuraavaksi esitetään määritelmät Pearlin kausaalimallille ja kausaalivaikutukselle. Lopuksi perehdytään kausaalivaikutuksen identifioitavuuteen ja esitellään muutama graafinen identifiointimenetelmä.

### 2.1 Historiaa

Filosofit ovat pohtineet kausaalisuutta paljon ajan saatossa. Jo antiikin kreikkalainen filosofi Aristoteles (384–322 eaa) erotti syyn käsitteestä aiheuttavan syyn ja finalistisen syyn. Finalistinen syy merkitsi Aristoteleelle sitä, että ilmiöt ovat selitettävissä niiden tarkoituksella. Esimerkiksi kivi tippuu pudotettaessa maahan, koska raskaiden aineiden on tarkoitus olla maassa. Tuohon aikaan gravitaatiokäsitetä ei vielä tunnettu. Aristoteleen näkökannat olivat voimassa aina renessanssin aikoihin saakka, kunnes ne kohtasivat teoreettisia vaikeuksia. Vuonna 1638 Galileo Galilei (1564–1642) julkaisi teoksen *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche, intorno a due nuoue scienze* (suom. Kaksi uutta tiedettä), jonka keskiössä on kaksi perussääntöä. Ensimmäisen säännön mukaan ensin tulee ilmiön kuvailu (kuinka, miten) ja toiseksi ilmiön selitys (miksi). Toisen säännön mukaan kuvailu on toteutettu käyttäen matematiikan kieltä eli yhtälöitä. David Humen (1711–1776) filosofian mukaan kausaalisuhteet ovat havaittuja säännönmukaisuuksia, jotka perustuvat peräkkäisten tapahtumien luomiin kokemuksiin ja niistä tehtäviin päätelmiin. (Hopkins 2004, 2–3; Pearl 2009, 403–406.)

Tilastotieteen puolella tarina kausaalisuudesta alkaa korrelaatiokäsitteestä. Korrelaation juuret ulottuvat vuoteen 1877, jolloin brittiläinen aikansa yleisnero Sir Francis Galton (1822–1911) julkaisi ensimmäisen regressionsa herneiden perinnöllisyydestä. Karl Pearson (1857–1936), brittiläinen tilastotieteilijä, jatkoi Galtonin aloittamaa työtä ja vuonna 1896 loi kaavan korrelaatiokertoimelle, joka on edelleen käytössä. (Stanton 2001, 1–13.) Pearsonin

korrelaatiokerroin tarjosi keinon laskea kahden muuttujan välinen lineaarinen riippuvuus, mikä mahdollisti regressiomallien muotoutumisen (Schumacker & Lomax 2010, 4). Regressioanalyysi on tilastollinen menetelmä, jossa kiinnostuksen kohteena ovat selittävien muuttujien  $x$  yhteydet selitettävään muuttujaan  $y$  sekä mallin selitysaste eli se, kuinka paljon  $x$ -muuttujat selittävät  $y$ -muuttujan vaihtelusta (Ketokivi 2015, 134–135; Vehkalahti 2008, 124).

Pearlin kausaaliteoriassa keskeisessä osassa ovat graafit eli polkukaaviot, jotka ovat polkumallien keskeinen ominaisuus (Pearl 2009). Ensimmäiset polkumallit kehitti biologi Sewall Wright (1889–1988) jo vuonna 1918, ja niiden ensimmäisiä sovelluksia hyödynnettiin eläinten käyttäytymisen tutkimisessa (Schumacker & Lomax 2010, 5). Polkumalli on tilastollinen menetelmä, joka on eräänlainen lineaaristen regressiomallien laajennus. Polkumallien kaikki muuttujat ovat havaittuja, ja niiden tarkoituksena on kuvata muuttujien väliset kausaalisuhteet. (Nummenmaa 2004, 372–373.)

Pearlin työ kausaalimallien parissa lähti liikkeelle 1980-luvulla Bayesin verkoista, joilla esitetään satunnaismuuttujien välisiä ehdollisia riippuvuuksia suunnatussa silmukattomassa graafissa. Myöhemmin hän yleistä Bayesin verkkojen ja kausaaligraafian takana olevat ideat laajemmin kausaaliin päättelyyn. Nykyään näistä malleista käytetään nimeä SCM (structural causal model). (Kline 2016, 164–165.)

## 2.2 Kausaalimalli

Pearlin kausaalimalli koostuu kiinnostuksen kohteena olevista muuttujajoukoista  $U$  ja  $V$ , muuttujien välisistä funktionaalisista yhteyksistä sekä muuttujien  $U$  yhteistodennäköisyysjakaumasta (Pearl 2009, 203–205; Pearl ym. 2016, 26).

**Määritelmä 2.1.** *Kausaalimalli* on nelikko

$$M = \langle U, V, F, P(u) \rangle,$$

jossa

1.  $U$  on taustamuuttujien joukko, jonka mallin ulkopuoliset tekijät määrittävät.
2.  $V$  on muuttujajoukko  $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ , joka määräytyy mallin muuttujista eli yhdisteen  $U \cup V$  alkioista.

3.  $F$  on funktiojoukko  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ , jolla jokainen  $f_i$  kuvautuu joukolta  $U_i \cup PA_i$  joukolle  $V_i$ , missä  $U_i$  on  $U$ :n osajoukko ja  $PA_i$  on erotuksen  $V \setminus V_i$  osajoukko sekä koko joukko  $F$  muodostaa kuvauksen  $U$ :lta  $V$ :lle. Näin ollen jokainen  $f_i$  antaa  $V_i$ :lle arvon

$$v_i = f_i(pa_i, u_i), \quad \text{jossa } i = 1, \dots, n.$$

4.  $P(u)$  on taustamuuttujajoukon  $U$  yhteistodennäköisyysjakauma.

(Pearl 2009, 203–205; Pearl 2012, 4.)

Muuttujia  $U_i$  kutsutaan myös eksogeenisiksi muuttujiksi, sillä ne eivät riipu mallin muista muuttujista. Muuttujia  $V_i$  taas sanotaan endogeenisiksi muuttujiksi, koska ne selittyvät mallin muilla muuttujilla. Jokainen endogeeninen muuttuja on siis vähintään yhden mallin eksogeenisen muuttujan jälkeläinen. Eksogeeninen muuttuja taas ei voi olla minkään mallin muuttujan jälkeläinen, koska sillä ei ole vanhempia. (Pearl ym. 2016, 27.)

Jokaiseen kausaalimalliin  $M$  liittyy suunnattu graafi  $G$ , jonka solmujoukon jokaista solmua vastaa yksi muuttuja  $U_i$  tai  $V_i$  ja jokaista särmää vastaa yksi funktio  $f_i$ . Kausaalilaskennassa keskitytään pääasiassa suunnattuihin silmukattomiin graafeihin, sillä kausaaliyhteydet pystytään tällöin määrittelemään yksikäsitteisesti. (Pearl 2009, 205; Pearl ym. 2016, 27.)

Kausaalimallille voidaan määrittää alamalli, joka saadaan kausaalimallin rakennetta muuttamalla.

**Määritelmä 2.2.** Olkoon  $M$  kausaalimalli,  $X$  muuttujajoukko  $V$ :ssä ja  $x$  jokin  $X$ :n arvo. Kausaalimallin  $M$  *alamalli*  $M_x$  on kausaalimalli

$$M_x = \langle U, V, F_x, P(u) \rangle,$$

jossa

$$F_x = \{f_i : V_i \notin X\} \cup \{X = x\}.$$

(Pearl 2009, 204.)

Käytännössä funktiojoukko  $F_x$  on muodostettu poistamalla  $F$ :n kaikki funktiot  $f_i$ , jotka vastaavat joukon  $X$  jäseniä, ja korvattu ne vakiofunktioilla  $X = x$ . Alamallin käsite on hyödyllinen määriteltäessä kausaalivaikutusta. (Pearl 2009, 204.)

## 2.3 Kausaalivaikutus

Kausaalilaskennassa keskeisenä mielenkiinnon kohteena on kausaalivaikutusten selvittäminen. Perinteisesti kausaalivaikutusta on tutkittu käyttäen satunnaistettua kontrolloitua koeasetelmaa. Pearlin kausaalisuusteoriassa on poistettu kokeellisen intervention tarve hyödyntämällä matemaattista operaattoria *do*. Interventio  $do(X = x)$  simuloi fyysistä interventiota korvaamalla tietyt muuttujat vakiolla  $X = x$  ja pitämällä mallin muilta osin muuttumattomana. Intervention tuloksena saadaan alamalli. (Pearl 2012, 4; Pearl ym. 2016, 53–55.)

**Määritelmä 2.3.** Olkoon  $M$  kausaalimalli,  $X$  ja  $Y$  kaksi erillistä muuttujajoukkoa  $V$ :ssä ja  $x$  tietty  $X$ :n arvo. *Kausaalivaikutus*  $X$ :stä  $Y$ :hyn on funktio  $X$ :stä  $Y$ :n todennäköisyysjakauman otosavaruuteen. Kausaalivaikutusta merkitään  $P(Y = y \mid do(X = x))$ . Jokaisella  $X = x$ ,  $P(Y = y \mid do(X = x))$  määrittää muuttujalle  $Y = y$  uuden todennäköisyysjakauman, joka esitetään alamallissa  $M_x$ . (Pearl 2009, 70 ja 204.)

On hyvä tunnistaa merkintöjen  $P(Y = y \mid X = x)$  ja  $P(Y = y \mid do(X = x))$  erot. Ensimmäinen kertoo  $Y$ :n ehdollisen todennäköisyyden ehdolla  $X$ , kun satunnaismuuttuja  $X$  saa luonnostaan arvon  $x$ . Toinen taas kertoo  $Y$ :n ehdollisen todennäköisyyden, kun satunnaismuuttujaan  $X$  on kohdistettu interventio ja aktiivisesti valittu  $X = x$ . (Pearl ym. 2016, 55.)

Ennen kuin kausaalivaikutus voidaan estimoida, pitää tietää, milloin kausaalivaikutus on identifioituva.

**Määritelmä 2.4.** *Kausaalivaikutus* muuttujasta  $X$  muuttujaan  $Y$  on *identifioituva* graafissa  $G$ , jos  $P_{M_1}(y \mid do(x)) = P_{M_2}(y \mid do(x))$  millä tahansa kahdella mallilla  $M_1$  ja  $M_2$ , joilla  $P_{M_1}(v) = P_{M_2}(v) > 0$  ja  $G(M_1) = G(M_2) = G$  (Pearl 2009, 77).

Kausaalivaikutuksen identifioitavuuden määritelmä tarkoittaa, että graafissa  $G$  kausaalivaikutus  $P(y \mid do(x))$  on yksiselitteisesti määritettävissä havaittujen muuttujien yhteisjakaumasta (Pearl 2009, 77). Tätä määritelmää ei kuitenkaan yleensä tarvita selvitetessä kausaalivaikutuksen identifioitavuutta. Sen sijaan kausaalivaikutuksen identifiointiin on olemassa käteviä, graafisia menetelmiä, joita käsitellään seuraavassa kappaleessa. (Pearl 2009, 79.)

## 2.4 Kausaalivaikutuksen graafinen identifiointi

Kausaalivaikutuksen identifioituvuus voidaan selvittää käyttäen graafisia menetelmiä. Ensin esitellään takaovikriteeri, joka on näppärä identifointimenetelmä, kun halutaan estimoida kausaalivaikutus havaittuja muuttujia sisältävästä kausaaligraafista. Toiseksi esitellään yleinen päättelysäännöstö kausaalivaikutuksen identifointiin, nimeltään kausaalilaskenta (*do*-calculus), jolla voidaan selvittää kausaalivaikutuksen identifioituvuus mistä tahansa kausaaligraafista. (Pearl 2009, 78–79 ja 85.)

### 2.4.1 Takaovikriteeri

Takaovikriteeri on kätevä tapa kontrolloitavan muuttujajoukon määrittämiseen, kun halutaan estimoida kausaalivaikutus havaittuja muuttujia sisältävästä kausaaligraafista. Takaovikriteeri pohjautuu käsitteeseen d-separaatio tai d-erottelu (1.6), joka esiteltiin graafiteorian perusteita käsittelevässä luvussa. (Kline 2016, 177; Pearl 2009, 78–79.)

Oletetaan, että  $G$  on kausaaligraafi,  $V$  on joukko havaittuja muuttujia  $G$ :ssä ja  $X$  ja  $Y$  ovat kaksi erillistä muuttujajoukkoa  $V$ :ssä. Tavoitteena on estimoida intervention  $do(X = x)$  vaikutus vastemuuttujajoukkoon  $Y$ . Takaovikriteeriä hyödyntämällä voidaan selvittää, onko  $V$ :n muuttujaosajoukko  $Z$  riittävä identifioimaan kausaalivaikutuksen  $P(y \mid do(x))$ . (Pearl 2009, 79.)

**Määritelmä 2.5.** Olkoon  $(X, Y)$  järjestetty muuttujapari suunnatussa silmukattomassa graafissa  $G$ . Muuttujajoukko  $Z$  täyttää *takaovikriteerin* (*the backdoor criterion*) suhteessa järjestettyyn muuttujapariin  $(X, Y)$ , jos

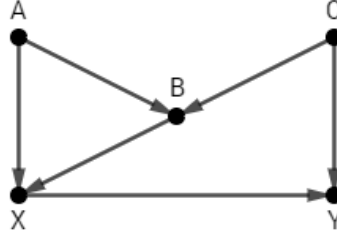
1. yksikään  $Z$ :n solmu ei ole  $X$ :n jälkeläinen, ja
2.  $Z$  tukkii jokaisen  $X$ :n ja  $Y$ :n välisen polun, joka sisältää  $X$ :ään osoittavan nuolen.

(Pearl ym. 2016, 85.)

**Lause 2.6.** Jos takaovikriteeri on voimassa, niin syy-seuraussuhde muuttujasta  $X$  muuttujaan  $Y$  saadaan kaavalla

$$P(Y = y \mid do(X = x)) = \sum_z P(Y = y \mid X = x, Z = z)P(Z = z)$$

(Pearl ym. 2016, 85).



Kuva 2: Esimerkin 2.7 kausaaligraafi.

Takaovipolku on siis polku  $X$ :stä  $Y$ :hyn, joka alkaa  $X$ :ään osoittavasta nuolesta ja päättyy  $Y$ :hyn. Tukkimalla jokainen takaovipolku  $X$ :n ja  $Y$ :n väliltä saadaan selville kausaalivaikutus  $X$ :stä  $Y$ :hyn. Jos takaovipolun tukkiminen tehdään kontrolloimalla jotakin muuttujajoukkoa  $Z$ , pitää ottaa huomioon, ettei  $Z$  ole  $X$ :n jälkeläinen kausaalipolulla, tai muuten se saattaa sulkea kausaalipolun osittain tai kokonaan. (Pearl & Mackenzie 2018, 158.)

Pearl ja Mackenzie (2018, 158–163) havainnollistavat takaovikriteerin soveltamista hauskojen ja yksinkertaisten kausaaligraafipelien avulla. Käydään seuraavaksi yksi tällainen peliesimerkki läpi.

**Esimerkki 2.7.** Tutkitaan kausaaligraafia  $G$ , joka on esitetty kuvassa 2. Tavoitteena on määrittää muuttujajoukko, joka tukkii jokaisen takaovipolun muuttujien  $X$  ja  $Y$  väliltä ja samalla jättää jokaisen kausaalipolun  $X$ :n ja  $Y$ :n väliltä auki.

Huomataan, että graafista löytyy kaksi takaovipolkua

1.  $X \leftarrow A \rightarrow B \leftarrow C \rightarrow Y$  ja
2.  $X \leftarrow B \leftarrow C \rightarrow Y$ .

Jos ensimmäinen takaovipolku ( $X \leftarrow A \rightarrow B \leftarrow C \rightarrow Y$ ) olisi graafin ainut takaovipolku, ei tarvitsisi kontrolloida mitään muuttujaa, sillä polku sisältää törmäyksen  $B$ . Törmäys tukkii polun ilman kontrollointia d-separaation määritelmän mukaan, ja törmäyksen kontrollointi vain avaisi jo tukitun polun. Halutessaan voisi kontrolloida  $A$ :n tai  $C$ :n.  $B$ :n kontrolloiminen on myös mahdollista, jos samaan aikaan kontrolloi  $A$ :n tai  $C$ :n. Jos toinen takaovipoluista ( $X \leftarrow B \leftarrow C \rightarrow Y$ ) olisi graafin ainut takaovipolku, voisi kontrolloida  $B$ :n tai  $C$ :n.

Tämä graafi sisältää kuitenkin nämä molemmat takaovipolut, joten ne on huomioitava yhdessä. Näin ollen havaitaan, että muuttuja  $C$  täyttää takaovikriteerin suhteessa järjestettyyn muuttujapariin  $(X, Y)$ , sillä se ei ole  $X$ :n

jälkeläinen ja tukkii jokaisen takaovipolun  $X$ :n ja  $Y$ :n väliltä. Siten kausaalivaikutus  $X$ :stä  $Y$ :hyn on identifioituva, ja se voidaan laskea kaavalla

$$P(Y = y \mid do(X = x)) = \sum_c P(Y = y \mid X = x, C = c)P(C = c).$$

Muuttujan  $C$  kontrolloiminen on riittävää, mutta  $C$ :n lisäksi on mahdollista kontrolloida myös  $A$  tai  $B$ . (Pearl & Mackenzie 2018, 162.)

## 2.4.2 Kausaalilaskenta

Kausaalilaskenta (*do-calculus*) on Pearlin kehittämä päättelysääntöjen joukko, joilla voidaan selvittää, onko kausaalivaikutus identifioituva kausaaligraafissa. Päättelysääntöjä on kolme, ja ne perustuvat tulkintaan *do*-operaattorista interventiona, joka muokkaa mallia korvaamalla tietyt muuttujat vakiolla  $X = x$  ja pitämällä mallin muilta osin muuttumattomana. Tulokseksi saadaan alamalli, joka esitetään graafissa  $G_{\overline{X}}$ . (Pearl 2009, 85–86.)

**Lause 2.8.** *Olkoon  $G$  kausaalimalliin  $M$  liittyvä suunnattu silmukaton graafi. Mille tahansa erilliselle muuttujien osajoukolle  $X, Y, Z$  ja  $W$  on voimassa seuraavat säännöt.*

1. *Havaintojen lisääminen tai poistaminen:*

$$P(y \mid do(x), z, w) = P(y \mid do(x), w), \quad \text{jos } (Y \perp\!\!\!\perp Z \mid X, W)_{G_{\overline{X}}}$$

2. *Toiminnan tai havainnon vaihtaminen:*

$$P(y \mid do(x), do(z), w) = P(y \mid do(x), z, w), \quad \text{jos } (Y \perp\!\!\!\perp Z \mid X, W)_{G_{\overline{XZ}}}$$

3. *Toimintojen lisääminen tai poistaminen:*

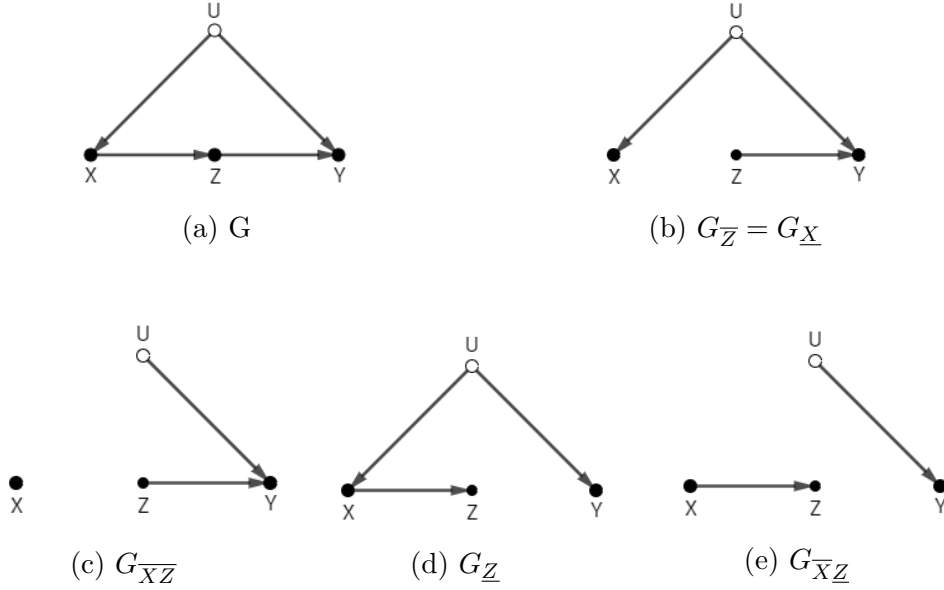
$$P(y \mid do(x), do(z), w) = P(y \mid do(x), w), \quad \text{jos } (Y \perp\!\!\!\perp Z \mid X, W)_{G_{\overline{X, Z(W)}}},$$

jossa  $Z(W)$  on joukko solmuja  $Z$ , jotka eivät ole yhdenkään solmun  $W$  esivanhempia graafissa  $G_{\overline{X}}$ .

(Pearl 2009, 85–86.)

Merkinnällä  $G_{\overline{X}}$  tarkoitetaan, että graafi on saatu poistamalla  $G$ :stä särmät, jotka osoittavat  $X$ :ään.  $G_{\underline{X}}$  taas tarkoittaa graafia, joka on saatu graafista  $G$  poistamalla särmät, jotka lähtevät  $X$ :stä. (Pearl 2009, 85–86.)





Kuva 3: Esimerkkien 2.10 ja 2.11 kausaaligraafit.

**Seuraus 2.9.** *Kausaalivaikutus  $q = P(y_1, \dots, y_k \mid do(x_1), \dots, do(x_m))$  on identifioituva graafissa  $G$ , jos äärellistä määrää kausaalilaskennan sääntöjä käyttäen kausaalivaikutus saadaan esitettyä ilman  $do$ -operaattoria (Pearl 2009, 86).*

Kausaalilaskennan on todistettu olevan täydellinen kausaalivaikutuksen identifioinnissa. Sen avulla voidaan siis johtaa kaikkien identifioituvien kausaalivaikutusten jakaumat, ja jos  $do$ -operaattoria ei saada poistettua näiden kolmen laskusäännön avulla, niin kausaalivaikutus ei ole identifioituva. (Pearl 2009, 86; Pearl 2012, 5.)

Käydään seuraavaksi läpi muutama esimerkki kausaalilaskennan sääntöjen soveltamisesta.

**Esimerkki 2.10.** Tehtävänä on määrittää kausaalivaikutus  $X$ :stä  $Z$ :aan graafissa  $G$ , joka on esitetty kuvassa 3. Tämä voidaan ratkaista yhdessä vaiheessa säännön 2 nojalla. Havaitaan, että  $X$  ja  $Z$  ovat riippumattomia ( $X \perp\!\!\!\perp Z$ ) graafissa  $G_{\underline{X}}$ , koska törmäyssolmu  $Y$  tukkii takaovipolun  $X \leftarrow U \rightarrow Y \leftarrow Z$ . Näin ollen kausaalivaikutus  $X$ :stä  $Z$ :aan saadaan laskettua kaavalla

$$P(z \mid do(x)) = P(z \mid x). \quad (2.1)$$

(Pearl 2009, 86.)

**Esimerkki 2.11.** Tehtävänä on määrittää kausaalivaikutus  $X$ :stä  $Y$ :hyn kausaaligraafissa  $G$  (ks. kuva 3). Aloitetaan kirjoittamalla kausaalivaikutus ehdollisen kokonaistodennäköisyyden kaavan 1.2 (esitetty todennäköisyysteorian peruskäsitteitä käsittelevässä luvussa 1.1) avulla, jolloin saadaan

$$P(y \mid do(x)) = \sum_z P(y \mid z, do(x))P(z \mid do(x)). \quad (2.2)$$

Yhtälön 2.2 jälkimmäinen osa määritettiin edellisessä esimerkissä (yhtälö 2.1), joten siirrytään suoraan yhtälön 2.2 ensimmäiseen osaan. Ensimmäisestä termistä  $P(y \mid z, do(x))$  ei suoraan saada poistettua  $do$ -operaattoria. Sen sijaan säännön 2 nojalla voidaan lisätä  $do$ -operaattori, jolloin

$$P(y \mid z, do(x)) = P(y \mid do(z), do(x)),$$

sillä ehto  $Y \perp\!\!\!\perp Z \mid X$  pätee graafissa  $G_{\overline{XZ}}$ . Nyt, säännön 3 nojalla, edellisestä yhtälöstä voidaan poistaa  $do(x)$ , sillä  $Y \perp\!\!\!\perp X \mid Z$  graafissa  $G_{\overline{XZ}}$ , joten

$$P(y \mid do(z), do(x)) = P(y \mid do(z)).$$

Sovelletaan jälleen ehdollisen kokonaistodennäköisyyden kaavaa 1.2, mutta tällä kertaa summattavan muuttujajoukon  $x$  yli, jolloin

$$P(y \mid do(z)) = \sum_x P(y \mid x, do(z))P(x \mid do(z)).$$

Yhtälön jälkimmäiseen osaan voidaan soveltaa sääntöä 3.  $X$  ja  $Z$  ovat riippumattomia graafissa  $G_{\overline{Z}}$ , sillä törmäyssolmu  $Y$  tukkii takaovipolun  $Z \rightarrow Y \leftarrow U \rightarrow X$ . Täten

$$P(x \mid do(z)) = P(x).$$

Yhtälön ensimmäiseen osaan voidaan käyttää sääntöä 2. Tällöin

$$P(y \mid x, do(z)) = P(y \mid x, z),$$

sillä ehto  $Z \perp\!\!\!\perp Y \mid X$  pätee graafissa  $G_{\overline{Z}}$ . Yhdistämällä kaksi edellistä, saadaan kausaalivaikutus  $Z$ :sta  $Y$ :hyn muotoon

$$P(y \mid do(z)) = \sum_x P(y \mid x, z)P(x). \quad (2.3)$$

Lopuksi yhtälön 2.2 kausaalivaikutus  $X$ :stä  $Y$ :hyn voidaan kirjoittaa yhtälöjen 2.1 ja 2.3 avulla muotoon

$$P(y \mid do(x)) = \sum_z P(z \mid x) \sum_{x'} P(y \mid x', z)P(x'). \quad (2.4)$$

Lopulliseen yhtälöön 2.4 on lisätty merkintä  $x'$ , koska on haluttu tehdä ero havaitun  $x$ :n ja summattavan  $x'$ :n välille. Itse asiassa tämä yhtälö 2.4 on sama kuin etuovikriteerin lauseke. Etuovikriteeri on graafinen identifiointimenetelmä, mutta se jätetään tässä käsittelemättä. (Pearl 2009, 87–88; Pearl ym. 2016, 68.)

Kausaalivaikutuksen identifiointi pienestä graafista takaovikriteerillä on suhteellisen helppoa, mutta suuremmista graafeista kontrolloitavien muuttujien löytäminen voi olla haasteellisempaa. Kausaalilaskennan soveltaminen ei myöskään ole helppoa, sillä *do*-operaattorin sääntöjen käyttäminen ei tapahdu systemaattisessa järjestyksessä. Tästä syystä kausaalivaikutuksen identifiointiin on kehitetty useita algoritmeja. Esimerkiksi Shpitser ja Pearl (2006) ovat rakentaneet algoritmin, joka soveltaa kausaalilaskennan ja todennäköisyyslaskennan sääntöjä. Algoritmin on osoitettu olevan täydellinen kausaalivaikutuksen identifioinnissa, ja se joko antaa oikean lausekkeen kausaalivaikutukselle tai epäonnistuu kausaalivaikutuksen identifioinnissa, jolloin kausaalivaikutus ei ole identifioituva. (Shpitser & Pearl 2006.) Jyväskylän yliopiston tutkijatohtori Tikka (2015) on luonut Shpitserin ja Pearlin algoritmiin pohjautuvan R-paketin ”causaleffect” pro gradu -tutkielmassaan. Väitöskirjassaan Tikka (2018) on parantanut algoritmin tuottamia lausekeita sieventämällä niitä yksinkertaisempaan ja helpommin ymmärrettävään muotoon.

### 3 Rakenneyhtälömallien teoriasta

Rakenneyhtälömallit (structural equation models, SEM) on kokoelma tilastollisia menetelmiä, joilla voidaan tutkia monimutkaisia, useiden muuttujien välisiä kausaalirakenteita. Rakenneyhtälömalleja sovelletaankin erityisesti käyttäytymis- ja yhteiskuntatieteiden puolella, sillä monesti näillä aloilla tutkittavat kausaaliyhteydet eivät ole yksinkertaisia. Rakenneyhtälömallissa kausaaliyhteydet kuvataan rakenneyhtälöinä, jotka voidaan esittää havainnollisesti polkukaavioiden avulla. Rakenneyhtälömallissa kausaalipäätely edellyttää vahvaa substanssiteoriaa ilmiöiden välisistä suhteista, joten rakenneyhtälömalleja ei voi hyödyntää aloilla, joilla teoria on epätarkkaa tai puutteellista. (Byrne 2012, 3; Kline 2015, 9; Pearl 2009, 133.)

Rakenneyhtälömallit ei ole yksittäinen tilastollinen menetelmä, vaan mallintaminen voi perustua konfirmatoriseen faktorimalliin, regressiomalliin, polkumalleihin tai yleiseen rakenneyhtälömalliin. Yleinen rakenneyhtälömalli koostuu kahdesta osasta: 1) mittausmallista, joka määrittää havaittujen ja ei-havaittujen muuttujien väliset yhteydet ja 2) rakennemallista, joka esittää ei-havaittujen muuttujien väliset yhteydet. (Byrne 2012, 14; Schumacker & Lomax 2010, 2.) Tässä luvussa rakenneyhtälömallilla tarkoitetaan juurikin yleistä rakenneyhtälömallia, vaikkei sitä erikseen mainittaisi.

Tämän luvun tavoitteena on antaa kattava yleiskuva rakenneyhtälömallien teoriasta. Ensin tutustutaan rakenneyhtälömallien kehitykseen ja perustermistöön. Tämän jälkeen määritellään rakenneyhtälömalli sekä perehdytään mallin identifiointiin, estimointiin, testaamiseen ja muokkaamiseen.

#### 3.1 Historiaa

Rakenneyhtälömallien kehitykseen liittyvät kolmenlaiset mallit: regressio-, polku- ja faktorimallit (Schumacker & Lomax 2010, 4). Regressio- ja polkumallien muotoutumisesta kerrottiin jo Pearlin kausaaliteorian yhteydessä, joten siirrytään suoraan faktorimalleihin ja niiden kehitykseen.

Faktorianalyysi on tilastollinen menetelmä, jossa pyritään löytämään aineistosta vähäulotteisempi piilorakenne muuttujien korrelaatioiden avulla. Piilorakenteteella tarkoitetaan sitä, että havaittujen muuttujien takana ajatellaan olevan pienempi määrä varsinaisen kiinnostuksen kohteena olevia ei-havaittuja eli latentteja muuttujia tai toisin sanoen faktoreita. Faktoreita ei siis voida suoraan mitata, mutta niiden oletetaan vaikuttavan havaittujen muuttujien vaihteluun. (Mustonen 1995, 75; Nummenmaa 2004, 397.)

Faktorianalyysi voidaan jakaa eksploratiiviseen faktorianalyysiin (exploratory factor analysis, EFA) ja konfirmatoriseen faktorianalyysiin (confirmatory factor analysis, CFA). Eksploratiivista lähestymistapaa käytetään, kun havaittujen ja latenttien muuttujien välisiä yhteyksiä ei tiedetä tai niistä ei olla vielä varmoja. Eksploratiivisen faktorianalyysin tavoitteena onkin selvittää, miten havaitut muuttujat ovat linkittyneet taustalla oleviin faktoreihin. Konfirmatorista lähestymistapaa taas käytetään, kun tutkijalla on ennestään tietämystä mallinnettavasta faktorirakenteesta. Tutkija siis muodostaa ensin oletetun mallin teorian tai empiirisen tutkimuksen pohjalta ja vasta sitten testaa tilastollisesti tätä oletetun mallin faktorirakennetta. (Byrne 2012, 5–6.)

Faktorianalyysi sai alkunsa psykologian puolella, kun vuonna 1904 brittiläinen psykologi Charles Spearman julkaisi artikkelin ”*General Intelligence, Objectively Determined and Measured*”, jossa käytetään ensimmäistä kertaa termiä faktorianalyysi. Artikkelissaan Spearman käyttää faktorianalyysia ihmisen älykkyyden rakenteen määrittelyyn. (Cudeck 2007, 1; Schumacker & Lomax 2010, 4.) Vuonna 1931 amerikkalainen psykologi Louis Leon Thurstone yleistä faktorianalyysin moniulotteisiin asetelmiin artikkelissaan *Multiple Factor Analysis* (Bock 2007, 35). 1940-luvulla myös tilastotieteilijät alkoivat pikkuhiljaa kiinnostua faktorianalyysista. Faktorianalyysin tilastollisten menetelmien kehittyminen lähti kuitenkin vauhdilla liikkeelle vasta laskentatehokkuuden parannuttua tietokoneiden yleistymisen myötä 1960-luvulla. Vuonna 1969 ruotsalainen tilastotieteilijä Karl Jöreskog kehitti konfirmatorisen faktorianalyysin. (Jöreskog 2007, 48–60.)

Rakenneyhtälömallien varhaisesta kehityksestä 1960- ja 1970-luvun vaihteessa vastasivat Karl Jöreskog, Ward Keesling ja David Wiley. He yhdistivät konfirmatorisen faktorimallin (mittausmallin) ja polkumallin (rakenne-mallin) ja loivat näin teoriakehyksen, jota nykyään kutsutaan rakenneyhtälö-malleiksi. Ensimmäinen rakenneyhtälömallien laskemiseen soveltuva ohjelma oli Jöreskogin ja hänen kollegansa Dag Sörbomin kehittämä LISREL, jonka ensimmäinen versio julkaistiin vuonna 1974. 1980- ja 1990-luvuilta eteenpäin rakenneyhtälömallien kehittäminen jatkui vilkkaasti, ja nykyään niitä sovelletaan monella eri tieteenalalla. (Kline 2016, 23; Schumacker & Lomax 2010, 6.)

## 3.2 Peruskäsitteitä

Rakenneyhtälömallissa muuttujat jaetaan havaittuihin eli indikaattorimuuttujiin ja ei-havaittuihin eli latentteihin muuttujiin, joita voidaan kutsua myös

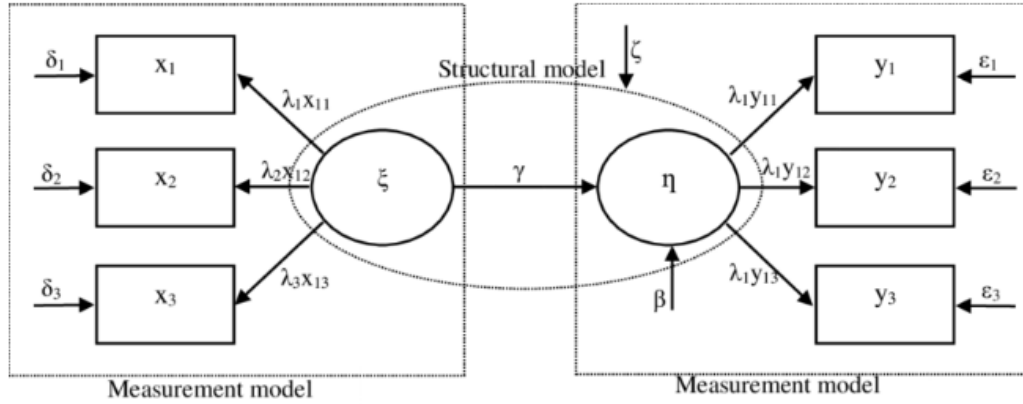
faktoreiksi. Havaitut muuttujat ovat suoraan mitattavissa aineistosta, kun taas latentit muuttujat eivät ole suoraan havaittavissa, joten ne eivät voi olla myöskään suoraan mitattavissa. Latentit muuttujat ovat yhteydessä havaittuihin muuttujiin, jotka tekevät niiden mittaamisen mahdolliseksi. (Byrne 2012, 4.)

Rakenneyhtälömalleissa on hyvä erottaa toisistaan eksogeeniset ja endogeeniset latentit muuttujat. Eksogeeninen latentti muuttuja tarkoittaa riippumatonta muuttujaa (syy) ja endogeeninen latentti muuttuja riippuvaa muuttujaa (seuraus). Eksogeeniset muuttujat vaikuttavat mallin endogeenisiin muuttujiin joko suoraan tai epäsuorasti. (Byrne 2012, 5.)

Rakenneyhtälömalli voidaan jakaa kahteen osaan: mittausmalliin (measurement model) ja rakennemalliin (structural model). Mittausmalli määrittää havaittujen ja latenttien muuttujien väliset yhteydet. Rakennemalli taas määrittää latenttien muuttujien keskinäiset yhteydet. (Byrne 2012, 14.)

Rakenneyhtälömalleja voidaan havainnollistaa polkukaavioilla, jotka koostuvat soikioista ja suorakulmioista sekä yksi- ja kaksisuuntaisista nuolista. Soikiot edustavat latentteja muuttujia ja suorakulmiot havaittuja muuttujia. Yksisuuntainen nuoli kuvaa yhden muuttujan vaikutusta toiseen muuttujaan. Kaksisuuntainen nuoli ilmaisee kahden muuttujan välistä kovarianssia tai korrelaatiota. (Byrne 2012, 9.)

Kuvassa 4 on esitetty rakennemallin polkukaavio jaettuna mittaus- ja rakennemalliin. Suorakulmioiden sisällä olevat  $x_1$ ,  $x_2$  ja  $x_3$  sekä  $y_1$ ,  $y_2$  ja  $y_3$  ovat havaittuja muuttujia, kun taas soikioiden sisällä olevat  $\xi$  ja  $\eta$  ovat latentteja muuttujia. Latenteista muuttujista  $\xi$  on eksogeeninen, sillä siihen ei osoita yksikään yksisuuntainen nuoli, kun taas  $\eta$  on endogeeninen, koska siihen johtaa nuoli  $\xi$ :stä. Yksisuuntaiset nuolet ( $\gamma$  ja  $\beta$ ) kuvastavat latenttien muuttujien välisiä regressiokertoimia. Näistä  $\gamma$  ilmoittaa eksogeenisen ja endogeenisen latentin muuttujan välisen polkukertoimen, kun taas  $\beta$  kuvaa kahden endogeenisen latentin muuttujan välistä polkukerrointa. Yksisuuntaiset nuolet ( $\lambda_x$  ja  $\lambda_y$ ) ilmaisevat latenttien ja havaittujen muuttujien väliset mittayhteydet. Lisäksi yksisuuntaisilla nuolilla kuvataan erilaisia virhetermejä. Havaittuihin muuttujiin liittyvistä mittausvirheistä  $\delta$ :t ilmaisevat riippumattomiin havaittuihin muuttujiin liittyviä mittausvirheitä ja  $\varepsilon$ :t riippumattomiin havaittuihin muuttujiin liittyviä mittausvirheitä. Termiä  $\zeta$  kutsutaan residuaaliksi, ja se on endogeeniseen latenttiin muuttujaan liittyvä häiriö- tai virhetermi. Residuaali kuvastaa siis endogeenisen latentin muuttujan osaa, jota malli ei pysty selittämään. (Byrne 2012, 9–12; Jöreskog 2007, 65–67; Schumacker & Lomax 2010, 374–376.) Näitä samoja kreikkalaisia kirjaimia käytetään seuraavassa kappaleessa, jossa esitetään rakenneyhtälömallin määritelmä käyttäen Jöreskogin LISREL-notaatioita.



Kuva 4: Rakenneyhtälömallin polkukaavio jaettuna mittaus- ja rakennemalliin (Najaf 2016).

### 3.3 Yleinen rakenneyhtälömalli

Jöreskogin LISREL-matriisimerkintöjä käyttäen rakenneyhtälömallin rakennosa voidaan esittää matriisiyhtälönä

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{B}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\zeta} \quad (3.1)$$

missä  $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)'$  on latenttien riippuvien muuttujien satunnaisvektori,  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)'$  on latenttien riippumattomien muuttujien satunnaisvektori,  $\mathbf{B}$  ( $m \times m$ ) ja  $\boldsymbol{\Gamma}$  ( $m \times n$ ) ovat kerroinmatriiseita,  $\boldsymbol{\alpha}$  on vakiovektori ja  $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m)'$  on residuaalin satunnaisvektori eli virhetermi. Yhtälössä oletetaan, että  $\boldsymbol{\zeta}$  ja  $\boldsymbol{\xi}$  eivät korreloi keskenään. Lisäksi oletetaan, että  $\mathbf{I} - \mathbf{B}$  on epäsingulaarinen eli kääntyvä. (Jöreskog 2007, 65–66).  $\mathbf{I}$  on  $m \times m$  identiteettimatriisi eli sen lävistäjän alkiot ovat ykkösiä ja muut nollia.

Kerroinmatriisit  $\mathbf{B}$  ja  $\boldsymbol{\Gamma}$  ovat muotoa

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & \beta_{12} & \dots & \beta_{1m} \\ \beta_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta_{m-1,m} \\ \beta_{m1} & \dots & \beta_{m,m-1} & 0 \end{bmatrix}$$

ja

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \dots & \gamma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{m1} & \dots & \gamma_{mn} \end{bmatrix}.$$

Matriisin  $\mathbf{B}$  alkiot kuvaavat suoraa vaikutusta  $\eta$ -muuttujilta toisille  $\eta$ -muuttujille. On hyvä huomata, että  $\mathbf{B}$ :n diagonaali-alkiot on aina kiinnitetty nolliksi. Tämä johtuu siitä, ettei koskaan olla kiinnostuneita siitä, missä määrin latentit riippuvat muuttujat vaikuttavat itse itseensä. Matriisin  $\mathbf{\Gamma}$  alkiot ilmaisevat suoraa vaikutusta  $\xi$ -muuttujilta  $\eta$ -muuttujille. (Schumacker & Lomax 2010, 374–376.)

Vektorit  $\boldsymbol{\eta}$  ja  $\boldsymbol{\xi}$  eivät ole havaittuja, mutta sen sijaan vektorit  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_p)'$  ja  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_q)'$  ovat havaittuja. Jöreskogin merkin-  
nön mittausmalli latenteille riippuville muuttujille  $\boldsymbol{\eta}$  voidaan määritellä yhtälöllä

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\tau}_y + \mathbf{\Lambda}_y \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.2)$$

ja riippumattomille latenteille muuttujille  $\boldsymbol{\xi}$  yhtälöllä

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\tau}_x + \mathbf{\Lambda}_x \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\delta}, \quad (3.3)$$

missä  $\boldsymbol{\tau}_y$  ja  $\boldsymbol{\tau}_x$  ovat vakiovektoreita,  $\mathbf{\Lambda}_y$  ( $p \times m$ ) ja  $\mathbf{\Lambda}_x$  ( $q \times n$ ) ovat kerroinmatriiseita sekä  $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)'$  ja  $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_q)'$  ovat virhetermin vektoreita eli mittausvirheitä. Näissä oletetaan, että mittausvirhe  $\boldsymbol{\varepsilon}$  ei korreloi latenttien riippuvien muuttujien  $\boldsymbol{\eta}$  kanssa ja vastaavasti mittausvirhe  $\boldsymbol{\delta}$  ei korreloi latenttien riippumattomien muuttujien  $\boldsymbol{\xi}$  kanssa. (Jöreskog 2007, 66–67.)

Kerroinmatriisit  $\mathbf{\Lambda}_y$  ja  $\mathbf{\Lambda}_x$  ovat muotoa

$$\mathbf{\Lambda}_y = \begin{bmatrix} \lambda_{11}^y & \dots & \lambda_{1m}^y \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{p1}^y & \dots & \lambda_{pm}^y \end{bmatrix}$$

ja

$$\mathbf{\Lambda}_x = \begin{bmatrix} \lambda_{11}^x & \dots & \lambda_{1n}^x \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{q1}^x & \dots & \lambda_{qn}^x \end{bmatrix}.$$

Matriisi  $\mathbf{\Lambda}_y$  kertoo indikaattorimuuttujien  $y$  faktorilataukset endogeenisissa latenteissa muuttujissa  $\eta$  ja matriisi  $\mathbf{\Lambda}_x$  indikaattorimuuttujien  $x$  faktorilataukset eksogeenisissa latenteissa muuttujissa  $\xi$ . (Schumacker & Lomax 2010, 374–375.)

Rakennemallin yhtälöön 3.1 ja mittausmallin yhtälöihin 3.2 ja 3.3 liittyy vielä yksi yhteinen oletus. Sen mukaan residuaalivektori  $\boldsymbol{\zeta}$  ei korreloi mittausvirheiden vektoreiden  $\boldsymbol{\varepsilon}$  ja  $\boldsymbol{\delta}$  kanssa. (Jöreskog 2004, 29.)

Rakenneyhtälömalliin liittyy useita kovarianssitermejä, ja niistä kaksi liittyy mallin rakenneosaan. Kovarianssimatriisi latenteille riippumattomil-



le muuttujille  $\xi$  on

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nn} \end{bmatrix}.$$

Kovarianssimatriisi residuaalille  $\zeta$  on

$$\mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} \psi_{11} & \cdots & \psi_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{m1} & \cdots & \psi_{mm} \end{bmatrix}.$$

Mittausmalliin liittyy myös kaksi kovarianssimatriisia. Kovarianssitermi  $y$ :n mittausvirheelle  $\varepsilon$  on  $\mathbf{\Theta}_\varepsilon$  ja se on muotoa

$$\mathbf{\Theta}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \theta_{11}^\varepsilon & \cdots & \theta_{1p}^\varepsilon \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{p1}^\varepsilon & \cdots & \theta_{pp}^\varepsilon \end{bmatrix}.$$

Kovarianssitermi  $x$ :n mittausvirheelle  $\delta$  on  $\mathbf{\Theta}_\delta$  ja se on muotoa

$$\mathbf{\Theta}_\delta = \begin{bmatrix} \theta_{11}^\delta & \cdots & \theta_{1q}^\delta \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{q1}^\delta & \cdots & \theta_{qq}^\delta \end{bmatrix}.$$

(Schumacker & Lomax 2010, 374–378.)

Tarkastellaan seuraavaksi koko mallin odotusarvo- ja kovarianssirakennetta. Edellä määriteltiin seuraavat kahdeksan eri matriisia: kerroinmatriisit  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{\Gamma}$ ,  $\mathbf{\Lambda}_y$  ja  $\mathbf{\Lambda}_x$  sekä kovarianssimatriisit  $\mathbf{\Phi} = Cov(\boldsymbol{\xi})$ ,  $\mathbf{\Psi} = Cov(\boldsymbol{\zeta})$ ,  $\mathbf{\Theta}_\varepsilon = Cov(\boldsymbol{\varepsilon})$  ja  $\mathbf{\Theta}_\delta = Cov(\boldsymbol{\delta})$ . Lisäksi olkoon  $\boldsymbol{\kappa} = E(\boldsymbol{\xi})$  ja  $\mathbf{\Theta}$  kovarianssimatriisi virhetermien  $\boldsymbol{\delta}$  ja  $\boldsymbol{\varepsilon}$  välillä eli

$$\mathbf{\Theta} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Theta}_\varepsilon & \mathbf{\Theta}'_{\delta\varepsilon} \\ \mathbf{\Theta}_{\delta\varepsilon} & \mathbf{\Theta}_\delta \end{bmatrix} = Cov \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\delta} \end{bmatrix}.$$

Tällöin  $\mathbf{z} = (\mathbf{y}', \mathbf{x}')'$ :n odotusarvovektori  $\boldsymbol{\mu}$  ja kovarianssimatriisi  $\boldsymbol{\Sigma}$  ovat muotoa

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_y + \mathbf{\Lambda}_y(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}(\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{\Gamma}\boldsymbol{\kappa}) \\ \boldsymbol{\tau}_x + \mathbf{\Lambda}_x\boldsymbol{\kappa} \end{bmatrix}$$

ja

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{yy} & \boldsymbol{\Sigma}_{yx} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{xy} & \boldsymbol{\Sigma}_{xx} \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

(Jöreskog 2007, 67.)

Kovarianssimatriisi  $\Sigma$  on supermatriisi, joka koostuu neljästä alimatriisista.  $\Sigma_{yy}$  ilmaisee  $y$ :n kovarianssitermin, ja se voidaan kirjoittaa muodossa

$$\Sigma_{yy} = \left[ \Lambda_y(I - B)^{-1}(\Gamma\Phi\Gamma' + \Psi)(I - B')^{-1}\Lambda'_y + \Theta_\varepsilon \right].$$

Tämä matriisiyhtälö sisältää rakennemalliin liittyvät matriisit ja  $y$ :n mittausmalliin liittyvät matriisit, muttei yhtään  $x$ :ään liittyvää matriisia. Alimatriisi  $\Sigma_{xx}$  käsittelee  $x$ :n kovarianssitermiä, ja se voidaan esittää muodossa

$$\Sigma_{xx} = \left[ \Lambda_x\Phi\Lambda'_x + \Theta_\delta \right].$$

Tämä matriisiyhtälö koostuu pelkästään  $x$ :n mittausmalliin kuuluvista matriiseista. Alimatriisit  $\Sigma_{xy}$  ja  $\Sigma_{yx}$  käsittävät  $x$ :n ja  $y$ :n välisen kovarianssin, ja ovat muotoa

$$\Sigma_{yx} = \left[ \Lambda_y(I - B)^{-1}\Gamma\Phi\Lambda'_x + \Theta'_{\delta\varepsilon} \right]$$

ja

$$\Sigma_{xy} = \left[ \Lambda_x\Phi\Gamma'(I - B')^{-1}\Lambda'_y + \Theta_{\delta\varepsilon} \right].$$

Alimatriisit  $\Sigma_{xy}$  ja  $\Sigma_{yx}$  ovat toistensa transpooseja. (Jöreskog 2007, 67; Schumacker & Lomax 2010, 378–379.)

### 3.4 Mallin identifioituvuus ja estimointi

Mallin parametrit voidaan estimoida vain jos malli on identifioituva, eli jos mallin jokainen parametri voidaan määrittää yksikäsitteisesti. Rakenneyhtälömalleissa mallin identifioinnissa sanotaan olevan kolme tasoa, jotka riippuvat havaitun kovarianssimatriisin  $S$  alkioiden ja estimoitavien parametrien lukumäärästä. Jos kovarianssimatriisin alkioiden määrä on suurempi kuin estimoitavien parametrien määrä, niin malli on yli-identifioituva. Rakenneyhtälömalleissa mallin yli-identifioituvuus on välttämätön ehto analyyseissa etenemiselle. Jos kovarianssimatriisin alkioiden määrä on sama kuin estimoitavien parametrien määrä, niin malli on juuri-identifioituva. Vaikka tällainen malli onkin identifioituva, se ei ole kiinnostuksen kohteena, koska mallin khiin neliötestin arvo sekä vapausasteiden määrä on nolla, eikä hypoteesia mallin riittävydestä näin ollen pystytä testaamaan. Jos kovarianssimatriisin alkioiden määrä on pienempi kuin estimoitavien parametrien määrä, niin malli on ali-identifioituva, eikä mallin parametreja voida estimoida yksiselitteisesti, vaan mahdollisia ratkaisuja on ääretön määrä. (Byrne 2012, 32–33; Schumacher & Lomax 2010, 57–58; Tabachnick & Fidell 2007, 709.)

Rakenneyhtälömallien identifioituvuudessa on eroja riippuen siitä onko malli rekursiivinen vai ei-rekursiivinen. Rekursiivisen rakenneyhtälömallin kausaalivaikutukset ovat yksisuuntaisia ja residuaalit oletetaan korreloimattomiksi. Ei-rekursiivinen rakenneyhtälömalli taas voi sisältää kausaalisilmukoita tai korreloivia residuaaleja. (Kline 2016, 135.) Rekursiiviset rakenneyhtälömallit ovat aina identifioituvia, kun taas ei-rekursiivisten rakenneyhtälömallien identifioituvuuden selvittäminen on monimutkaisempaa (Kline 2016, 149–150). Ei-rekursiivisten rakenneyhtälömallien identifioituvuuden määrittämistä ei tässä lähdetä avaamaan, sillä myöhemmin, luvussa 4, esitetty esimerkkimalli on rekursiivinen. Lisätietoa ei-rekursiivisten mallien identifioituvuudesta löytyy esimerkiksi Kline (2016) kirjasta.

Identifioinnin kannalta tärkeää on määrittää latenttien muuttujien mittaasteikko, sillä nämä muuttujat ovat havaitsemattomia, eikä niillä ole enneltä määrättyä metristä asteikkoa. Yleisin tapa ongelman ratkaisuun on joko kiinnittää jokaisen faktorin varianssi ykköseksi tai kiinnittää yhden faktorilatauksen arvo ykköseksi jokaisesta faktorista. (Byrne 2012, 33–34; Schumacher & Lomax 2010, 58–59; Tabachnick & Fidell 2007, 710.)

Rakenneyhtälömallin parametrien estimoinnissa tavoitteena on minimoida havaitun kovarianssimatriisin  $\mathbf{S}$  ja mallin ennustaman kovarianssimatriisin  $\mathbf{\Sigma}$  välinen erotus. Tämän tavoitteen saavuttamiseksi minimoidaan sovitusfunktio, jonka yleinen muoto on

$$F = \frac{1}{2} \text{tr}[(\mathbf{S} - \mathbf{\Sigma})\mathbf{W}^{-1}]^2, \quad (3.5)$$

missä  $\mathbf{W}$  on painomatriisi, joka vaihtelee käytetystä estimointimenetelmästä riippuen. Lyhenne ”tr” tarkoittaa matriisin jälkeä eli matriisin diagonaalialkioiden summaa. Rakenneyhtälömallin parametrien estimoinnissa on siis kyse jäännöskovarianssimatriisin  $\mathbf{S} - \mathbf{\Sigma}$  alkioiden neliöiden painotetun summan minimoimisesta. (Ketokivi 2015, 187; Schumacker & Lomax 2010, 59–60; Tabachnick & Fidell 2007, 713.)

Rakenneyhtälämalleissa on useita mahdollisia estimointimenetelmiä. Estimointitapa valitaan päättämällä sopiva painomatriisi  $\mathbf{W}$ . Yleisimmin käytetty estimaattori on suurimman uskottavuuden estimaattori, jossa painomatriisina on mallin ennustama kovarianssimatriisi  $\mathbf{W} = \hat{\mathbf{\Sigma}}$ , joten sovitusfunktio (3.5) saa muodon

$$F_{ML} = \frac{1}{2} \text{tr}[(\mathbf{S} - \mathbf{\Sigma})\hat{\mathbf{\Sigma}}^{-1}]^2.$$

Muita mahdollisia estimointimenetelmiä ovat esimerkiksi painottamaton pienimmän neliösumman estimointi, jossa painomatriisina toimii identiteettimatriisi  $\mathbf{I}$  tai yleistetty pienimmän neliösumman estimointi, jossa painomat-

riisiksi valitaan havaittu kovarianssimatriisi  $\mathbf{S}$ . Eri estimointitapoja käytettäessä tehdään tiettyjä oletuksia havaintoaineiston muuttujista. Esimerkiksi näissä kolmessa esitellyssä estimointitavassa oletetaan, että mallin muuttujat noudattavat moniulotteista normaalijakaumaa. (Ketokivi 2015, 187 ja 310–312.)

### 3.5 Mallin sopivuus

Kun rakenneyhtälömalli on estimoitu, niin seuraavaksi on kiinnostavaa tietää, sopiiko estimoitu malli aineistoon vai ei.  $\chi^2$ -testi testaa, poikkeako jäännöskovarianssimatriisi tilastollisesti merkitsevästi nollassa. Nollahypoteesina on, että jäännöskovarianssimatriisi ei poikkea nolasta ja vastahypoteesina, että se poikkeaa nolasta, eli

$$H_0 : \mathbf{S} - \mathbf{\Sigma} = 0$$

$$H_1 : \mathbf{S} - \mathbf{\Sigma} \neq 0.$$

Nollahypoteesin ollessa voimassa ja muuttujien ollessa moniulotteisesti normaalijakautuneita sovituskfunktio noudattaa jakaumaa  $(N-1)F_{ML} \sim \chi^2(df)$ . Jos testisuureen p-arvo on suuri, niin malli sopii aineistoon. (Ketokivi 2015, 189–190.)  $\chi^2$ -testissä pitää kuitenkin ottaa huomioon muutama seikka. Suurella otoskoolla  $H_0$  hylätään helposti, jolloin havaitun ja estimoidun kovarianssimatriisin välinen ero tulee tilastollisesti merkitseväksi, sillä sovituskfunktion arvo kerrotaan luvulla  $N-1$ . Pienellä otoskoolla laskettu  $\chi^2$ -testisuuren arvo ei välttämättä noudata  $\chi^2$ -jakaumaa, mikä puolestaan vääristää tulosta mallin tilastollisesta merkitsevyydestä. (Byrne 2012, 68–69; Tabachnick & Fidell 2007, 715.)

$\chi^2$ -testin käyttöön liittyvistä rajoitteista johtuen on kehitetty monia muita mallin sopivuutta mittaavia indeksejä (Tabachnick & Fidell 2007, 715). Näistä yleisimpiä ja suositeltavimpia ovat CFI (comparative fit index), TLI (Tucker-Lewis fit index), RMSEA (root mean square error of approximation) ja SRMR (standardized root mean square residual) (Byrne 2012, 69–72; Vehkalahti & Everitt 2019, 323–324).

CFI ja TLI ovat sopivuusindeksejä, jotka vertailevat estimoidun mallin paremmuutta verrokkimalliin (baseline model) nähden. Verrokkimalliksi valitaan yleensä riippumattomien muuttujien malli eli niin sanottu nollamalli, jossa mitkään mallin muuttujat eivät korreloi keskenään. CFI lasketaan kaavalla

$$CFI = 1 - \frac{\chi_{malli}^2 - df_{malli}}{\chi_{nollamalli}^2 - df_{nollamalli}}$$

ja TLI kaavalla

$$TLI = \frac{\chi^2_{nollamalli}/df_{nollamalli} - \chi^2_{malli}/df_{malli}}{\chi^2_{nollamalli}/df_{nollamalli} - 1}.$$

CFI:n arvojen vaihteluväli on normitettu välille nollasta yhteen. TLI saa yleensä arvoja nollan ja yhden väliltä, mutta myös negatiiviset tai ykköstä suuremmat arvot ovat mahdollisia. Arvojen tulkinta on kuitenkin samanlainen: mitä lähempänä indeksien arvo on yhtä, sitä paremmin malli sopii aineistoon verrokkimalliin nähden. Kirjallisuudessa karkeana rajana hyvin sopivalle mallille pidetään CFI:n tai TLI:n arvoa, joka on suurempi kuin 0,95. (Byrne 2012, 70–71; Schumacker & Lomax 2010, 75–76; Tabachnick & Fidell 2007, 717.) Ketokiven (2015, 191) mukaan vertailevien sopivuusindeksien heikkoutena on, että verrokkimalliksi valitaan aineistoon alunperinkin huonosti sopiva nollamalli, jolloin ajatus aineistoon paremmin sopivasta mallista on harhaanjohtava.

RMSEA ja SRMR ovat absoluuttisia sopivuusindeksejä. RMSEA voidaan laskea kaavalla

$$RMSEA = \sqrt{\frac{\chi^2_{malli} - df_{malli}}{(N - 1)df_{malli}}}.$$

RMSEA vertaa estimoidun mallin sopivuutta saturoituun eli aineistoon täydellisesti sopivaan malliin nähden. SRMR taas kuvaa mallin yleistä riittävyyttä tarkastelemalla keskimääräistä jäännöskovarianssimatriisia, ja indeksien arvot on standardoitu välille nollasta yhteen. Mitä lähempänä RMSEA:n ja SRMR:n arvot ovat nollaa, sitä paremmin estimoitu malli sopii aineistoon. 0,05 pidetään karkeana raja-arvona aineistoon hyvin sopivalle mallille. RMSEA:n ja SRMR:n heikkoutena on niiden herkkyys estimoitavien parametrien määrän vaihtelulle. (Byrne 2012, 72–76; Tabachnick & Fidell 2007, 717.)

Sopivuusindeksien käyttökelpoisuudesta väitellään jatkuvasti. Hyvälle sopivuusindeksille on esitetty useita kriteereitä, mutta ainakaan vielä yksikään indeksi ei toteuta niitä kaikkia. Yhteenvetona voitaisiin sanoa, että on tärkeää käyttää useita sopivuusmittareita päätöksenteon tukena. (Byrne 2012, 77; Schumacker & Lomax 2010, 91.) Myöskin indekseille annetut raja-arvot ovat sopimuksen mukaisia, ja niitä tulisi käyttää enemmän suuntaa antavina kuin täsmällisesti noudatettavina (Ketokivi 2015, 192).

## 3.6 Mallin muokkaaminen

Jos alkuperäinen malli ei ole riittävän hyvä, mallin sovittamista on mahdollista jatkaa. Yksi keino mallin muokkaamiseen on käyttää Sörbomin kehittämää modifikaatioindeksiä (MI). Se kertoo, kuinka paljon  $\chi^2$ -arvo likimäärin laskisi, jos tietyt parametrit olisi määriteltä ja vapaasti estimoitavissa. Toinen mallin sovituksen yhteydessä käytetty indeksi on EPC (expected parameter change), joka kertoo kiinnitettyjen parametrien odotetun muutoksen suuruuden ja suunnan, jos ne olisivat vapaasti estimoitavissa. (Byrne 2012, 82–86; Schumacker & Lomax 2010, 64–66.)

Uuden mallin sopivuutta alkuperäiseen malliin verrattuna voidaan tutkia  $\chi^2$ -erotustestillä. Tämä testi kertoo, sopiiko sisäkkäisistä malleista yksinkertaisempi malli yhtä hyvin aineistoon kuin monimutkaisempi malli.  $\chi^2$ -erotustestiä varten tulee laskea mallien  $\chi^2$ -testisuureiden erotus ( $\Delta\chi^2$ ) ja vapausasteiden erotus ( $\Delta df$ ). Testisuureiden erotus noudattaa jakaumaa  $\Delta\chi^2 \sim \chi^2(\Delta df)$ , jos mallit sopivat aineistoon yhtä hyvin. Mikäli tulos on tilastollisesti merkitsevä valitulla merkitsevyystasolla ja uudet malliin lisätyt parametrit ovat sisällöllisesti mielekkäitä, niin mallin sovittaminen on suotavaa. (Byrne 2012, 168–169; Ketokivi 2015, 193–194.)

Mallia muokatessa on myös tärkeää tietää, milloin lopettaa sovittaminen. Tähän ei kuitenkaan ole virallisia ohjenuoria, vaan tutkijan on otettava huomioon substanssiteoria, arvioitava tilastollisia kriteerijä ja mietittävä, ettei malli muutu liian monimutkaiseksi, jottei sitä olisi mahdotonta toistaa myöhemmissä validointitutkimuksissa. (Byrne 2012, 182–184.)

Tässä luvussa tutustuttiin yleisellä tasolla rakenneyhtälömallien teoriaan. Seuraavassa luvussa tarkastellaan empiirisen esimerkin avulla tässä luvussa esiteltyjä teemoja.

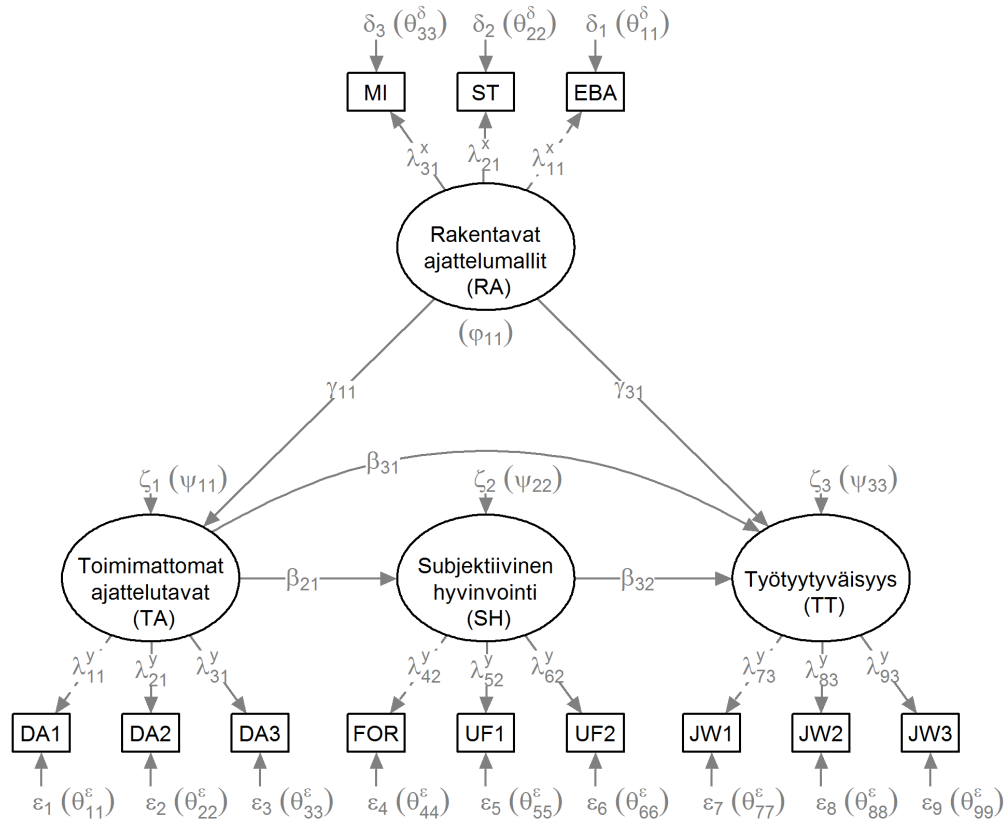
## 4 Empiirinen esimerkki

Tämän luvun tarkoituksena on havainnollistaa rakenneyhtälömallin muodostamista empiirisen esimerkin avulla. Esimerkin perustana käytetään Houghtonin ja Jinkersonin (2007) artikkelia rakentavista ajattelumalleista ja työtyytyväisyydestä. Analyysit on tehty käyttäen R:n lavaan-pakettia, ja kuvat on piirretty R:n semPlot-paketilla. Esimerkin pohjana on käytetty Klinen (2016) kirjan nettisivuilta löytyvää R-koodia. Kline (2016) samoin kuin Vehkalahti ja Everitt (2019) ovat käyttäneet Houghtonin ja Jinkersonin (2007) artikkelia omien SEM-esimerkkiensä pohjana.

### 4.1 Johdanto

Houghton ja Jinkerson (2007) tutkivat artikkelissaan rakentavien ajattelumallien yhteyttä työtyytyväisyyteen. Heidän tutkimuksensa otos koostui 263 yliopiston kokoaikaisesta työntekijästä. Aiempaan empiiriseen tutkimukseen ja taustateoriaan perustuen Houghton ja Jinkerson (2007) muodostivat rakenneyhtälömallin, joka koostuu neljästä latentista faktorista ja 12 havaitusta muuttujasta. Neljä latenttia faktoria ovat nimeltään: rakentavat ajattelumallit (constructive thought strategies), toimimattomat ajattelutavat (dysfunctional thought processes), subjektiivinen hyvinvointi (subjective well-being) ja työtyytyväisyys (job satisfaction). (Houghton & Jinkerson 2007, 45–48.)

Rakentavat ajattelumallit on mitattu käyttäen Houghtonin ja Neckin itsensä johtamiskyselyä (Revised Self-Leadership Questionnaire, RSLQ), joka perustuu Neckin ja Manzin (1992) käsitykseen rakentavista ajattelumalleista. Neckin ja Manzin (1992) mukaan rakentavat ajattelumallit sisältävät toimimattomien uskomusten ja oletusten tunnistamista ja korvaamista (EBA, evaluating beliefs and assumptions). Heidän mukaansa toimimattomien uskomusten muuttaminen tapahtuu kuvittelemalla onnistunut suoritus etukäteen (MI, mental imagery) ja käyttämällä positivistista sisäistä puhetta (ST, self-talk). Toimimattomat ajattelutavat faktorin indikaattorit on muodostettu validoidusta toimimattomia kognitiivisia prosesseja mittaavasta kyselystä (DA, Dysfunctional Attitude Survey). Subjektiivista hyvinvointia on mitattu kahdella eri asteikolla: Underwoodin ja Fromingin (UF) mielialakyselyllä, jolla arvioidaan mielialan tasoa sekä Fordycen (FOR) onnellisuusmittarilla, jolla määritetään onnelliseksi tuntema aika prosentteina. Työtyytyväisyyttä on tutkittu työtyytyväisyysmittarilla (Job Descriptive Index). Tämä mittari



Kuva 5: Oletetun mallin polkukaavio LISREL-merkinnöin. Parametrien varianssit on merkitty sulkuihin vastaavien muuttujien viereen.

koostuu yhteensä viidestä osa-alueesta, joista tässä on käytetty osa-aluetta ”työ” (”work”). (Houghton & Jinkerson 2007, 45–49.)

Houghtonin ja Jinkersonin (2007) artikkeliin perustuen on muodostettu oletettu rakenneyhtälömalli, jonka polkukaavio on esitetty kuvassa 5. Kuva sisältää Jöreskogin LISREL-notaatiot, joita käsitellään seuraavassa kappaleessa. Todetaan vielä, että oletettu malli on yli-identifioituva, rekursiivinen ja jokaisesta faktorista on kiinnitetty yksi faktorilataus ykköseksi, joten malli on estimoitavissa.



## 4.2 Malli matriisimerkinnöin

Luvussa 3.3 käsiteltiin Jöreskogin kehittämää LISREL-matriisimerkintöjä yleisellä tasolla. Tässä kappaleessa havainnollistetaan, miltä rakenneyhtälömallin matriisit näyttävät oletetun mallin (ks. kuva 5) tapauksessa.

Rakenneyhtälömallin rakenneosan muuttujat voidaan jakaa eksogeenisiin (selittäviin) ja endogeenisiin (selitettäviin) muuttujiin. Jöreskogin LISREL-matriisimerkinnöissä latentteja eksogeenisiä muuttujia merkitään  $\xi$ :llä ja endogeenisiä  $\eta$ :lla. Esimerkkimallissa rakentavat ajattelumallit on eksogeeninen muuttuja ( $\xi_1$ ). Endogeenisiä muuttujia ovat toimimattomat ajattelutavat ( $\eta_1$ ), subjektiivinen hyvinvointi ( $\eta_2$ ) ja työtyytyväisyys ( $\eta_3$ ). Mittausmallin havaittuja riippumattomia muuttujia merkitään  $x$ :llä ja riippuvia  $y$ :llä. Esimerkkimallissa  $EBA = x_1$ ,  $ST = x_2$  ja  $MI = x_3$  sekä  $DA1 = y_1$ ,  $DA2 = y_2$ ,  $DA3 = y_3$ ,  $FOR = y_4$ ,  $UF1 = y_5$ ,  $UF2 = y_6$ ,  $JW1 = y_7$ ,  $JW2 = y_8$  ja  $JW3 = y_9$ .

Jöreskogin LISREL-notaatioita käyttäen esimerkin rakennemalli voidaan esittää matriisiyhtälönä  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{B}\boldsymbol{\eta} + \mathbf{\Gamma}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\zeta}$  (kaava 3.1). Matriisiyhtälön alkiot ovat tällöin muotoa

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \beta_{21} & 0 & 0 \\ \beta_{31} & \beta_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ 0 \\ \gamma_{31} \end{bmatrix} [\xi_1] + \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{bmatrix}.$$

Yllä esitettyssä rakennemallin matriisiyhtälössä on nollassi asetettuja alkioita. Nämä alkiot vastaavat oletetun mallin parametreja, joista ei olla kiinnostuneita. Esimerkiksi rakentavien ajattelumallien suorasta vaikutuksesta subjektiiviseen hyvinvointiin ei olla kiinnostuneita, joten kuvasta 5 ei löydy kyseistä polkua, ja näin ollen  $\gamma_{21}$  on asetettu nollassi. Muistutuksena matriisin  $\mathbf{B}$  diagonaali-alkiot on aina kiinnitetty nollassi, sillä latenttien muuttujien vaikutuksesta itseensä ei koskaan olla kiinnostuneita. Matriisi  $\mathbf{B}$  on alakolmio-matriisi, koska oletettu malli on rekursiivinen, eikä näin ollen sisällä yhtään kausaalisilmukkaa.

Mittausmalli latenteille endogeenisille muuttujille  $\eta$  voidaan määritellä

yhtälöllä  $\mathbf{y} = \mathbf{\Lambda}_y \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\varepsilon}$  (kaava 3.2), jonka matriisien alkiot ovat

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda_{21}^y & 0 & 0 \\ \lambda_{31}^y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_{52}^y & 0 \\ 0 & \lambda_{62}^y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_{83}^y \\ 0 & 0 & \lambda_{93}^y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ \varepsilon_7 \\ \varepsilon_8 \\ \varepsilon_9 \end{bmatrix}.$$

Mittausmalli latenteille eksogeenisille muuttujille  $\xi$  saadaan matriisiyhtälöllä  $\mathbf{x} = \mathbf{\Lambda}_x \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\delta}$  (kaava 3.3), jonka matriisien alkiot ovat

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_{21}^x \\ \lambda_{31}^x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix}.$$

Mittausmallien matriisiyhtälöissä yksi jokaisen faktorin faktorilatauksista on kiinnitetty ykköseksi, jotta faktoreiden mitta-asteikko saadaan määritettyä. Tässä tapauksessa faktorilataukset  $\lambda_{11}^x$ ,  $\lambda_{11}^y$ ,  $\lambda_{42}^y$  ja  $\lambda_{73}^y$  on asetettu ykkösiksi. Kuvassa 5 ykkösiksi kiinnitettyjä faktorilatauksia merkitään katkoviivalla.

Molempiin sekä rakenne- että mittausmalliin liittyy kaksi kovarianssimatriisia. Muistutuksena kovarianssimatriisit ovat symmetrisiä, ja niiden diagonaali-alkiot vastaavat muuttujien varianssia ja muut alkiot muuttujien välistä kovarianssia. Rakennemallissa kovarianssimatriisi riippumattomille latenteille muuttujille  $\xi$  on

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \varphi_{11} \end{bmatrix},$$

ja kovarianssimatriisi residuaalille  $\zeta$  on

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \psi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \psi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{33} \end{bmatrix}.$$

Oletetussa mallissa (ks. kuva 5) on vain yksi latentti eksogeeninen muuttuja rakentavat ajattelumallit ( $\xi_1$ ). Näin ollen siihen liittyvä kovarianssimatriisi  $\boldsymbol{\Phi}$  sisältää vain yhden alkion eli  $\xi_1$ :n varianssitermin  $\varphi_{11}$  eikä yhtään kovarianssitermiä. Oletetussa mallissa on kolme latenttia endogeenistä  $\eta$  muuttujaa, ja jokaiseen niistä liittyy oma virheterminsä  $\zeta$ . Rekursiivisissa mallissa residuaalit  $\zeta$  oletetaan korreloimattomiksi, joten kovarianssimatriisi  $\boldsymbol{\Psi}$  on diagonaalinen.

Mittausmallin kovarianssimatriisi  $y$ :n mittausvirheelle  $\varepsilon$  on

$$\mathbf{\Theta}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \theta_{11}^\varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_{22}^\varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_{33}^\varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta_{44}^\varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_{55}^\varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_{66}^\varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_{77}^\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_{88}^\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_{99}^\varepsilon \end{bmatrix},$$

ja kovarianssimatriisi  $x$ :n mittausvirheelle  $\delta$  on

$$\mathbf{\Theta}_\delta = \begin{bmatrix} \theta_{11}^\delta & 0 & 0 \\ 0 & \theta_{22}^\delta & 0 \\ 0 & 0 & \theta_{33}^\delta \end{bmatrix}.$$

Tässä mallissa (ks. kuva 5) mittausvirheiden oletetaan olevan korreloimattomia, joten kovarianssimatriisit  $\mathbf{\Theta}_\varepsilon$  ja  $\mathbf{\Theta}_\delta$  ovat diagonaalimatriiseja. Yleisesti rakenneyhtälömalleissa mittausvirheiden ei tarvitse olla korreloimattomia. Monesti kun rakenneyhtälömallia lähdetään luomaan, mittausvirheet oletetaan korreloimattomiksi. Kun mallin sovitusta jatketaan, mittausvirheiden nollaksi kiinnitettyjä kovariansseja voidaan vapauttaa estimointiin.

Edellä esitellyistä matriiseista muodostetaan lopullinen mallin ennustama kovarianssimatriisi  $\mathbf{\Sigma}$  (ks. kaava 3.4 kappaleesta 3.3), jota verrataan havaittuun kovarianssimatriisiin  $\mathbf{S}$ , joka on annettu taulukossa 1. Mallin estimoinnissa tavoitteena on minimoida jäännöskovarianssimatriisi  $\mathbf{S} - \mathbf{\Sigma}$  valitun estimaattorin avulla (Schumacker & Lomax 2010, 59–60).

### 4.3 Hypoteesit

Houghtonin ja Jinkersonin (2007) tutkimuksen tavoitteena on selvittää, miten kognitiiviset prosessit vaikuttavat työtyytyväisyyteen. Hypoteesit on asetettu heidän artikkelinsa mukaisesti.

- H1: Subjektiiivinen hyvinvointi vaikuttaa positiivisesti työhyvinvointiin.
- H2: Toimimattomat ajattelutavat vaikuttavat negatiivisesti subjektiiiviseen hyvinvointiin.

- H3: Rakentavat ajattelumallit vaikuttavat negatiivisesti toimimattomiin ajattelutapoihin.
- H4: Toimimattomat ajattelutavat vaikuttavat negatiivisesti työtyytyväisyyteen.
- H5: Subjektiivisella hyvinvoinnilla on osittainen välillinen vaikutus toimimattomien ajattelutapojen ja työtyytyväisyyden välillä.
- H6: Rakentavat ajattelumallit eivät vaikuta suoraan työtyytyväisyyteen vaan ainoastaan toimimattomien ajattelutapojen ja subjektiivisen hyvinvoinnin kautta. (Houghton & Jinkerson 2007, 47–48.)

## 4.4 Mallin sovittaminen

Tutustutaan seuraavaksi siihen, miten rakenneyhtälömalli määritetään R:n lavaan-paketilla. Koodissa havaitsemattomille muuttujille on annettu lyhenneet RA = rakentavat ajattelumallit, TA = toimimattomat ajattelutavat, SH = subjektiivinen hyvinvointi ja TT = työtyytyväisyys (vrt. kuva 5).

```

1 TTmalli <- '
2 # mittausmalli
3 RA =~ EBA + ST + MI
4 TA =~ DA1 + DA2 + DA3
5 SH =~ FOR + UF1 + UF2
6 TT =~ JW1 + JW2 + JW3
7 # rakennemalli
8 TA ~ RA
9 SH ~ TA
10 TT ~ TA + SH + RA'
```

Tämä malli voidaan jakaa mittaus- ja rakenneosaan, joiden määrittämiseen käytetään eri operaattoreita. Merkintä " $\approx$ " tarkoittaa latentin ja havaitun muuttujan välistä mittayhteyttä. Merkintä " $\sim$ " kuvaa kahden latentin muuttujan välistä regressiota. Lisäksi mallin määrittelyssä voidaan käyttää operaattoria " $\sim\sim$ ", joka tarkoittaa muuttujien välistä korrelaatiota. Jos korrelaatio-operaattorin molemmilla puolilla on samanniminen muuttuja, kyseessä on muuttujan varianssia tai residuaalivarianssi. Jos taas muuttujat ovat erinimiset, tarkoitetaan muuttujien välistä kovarianssia tai residuaalikovarianssia. (Rosseel 2018, 3.)

Mallin sovituksessa on käytetty lavaan-paketin sem-funktiota. Mallia sovitettaessa tarvitaan tieto aineistosta tai aineiston muuttujien kovarianssimatriisista. Tässä mallin perustana on käytetty kovarianssimatriisia, josta

	JW1	JW2	JW3	FOR	UF1	UF2	DA1	DA2	DA3	EBA	ST	MI
JW1	0.88	0.64	0.56	0.14	0.21	0.10	-0.11	-0.16	-0.18	0.05	0.06	0.11
JW2	0.64	1.03	0.57	0.15	0.24	0.13	-0.11	-0.15	-0.18	0.07	0.03	0.18
JW3	0.56	0.57	0.88	0.09	0.18	0.11	-0.11	-0.14	-0.13	0.06	-0.04	0.06
FOR	0.14	0.15	0.09	0.32	0.21	0.07	-0.10	-0.12	-0.10	-0.01	-0.04	0.04
UF1	0.21	0.24	0.18	0.21	0.58	0.18	-0.12	-0.14	-0.14	0.08	-0.04	0.10
UF2	0.10	0.13	0.11	0.07	0.18	0.27	-0.04	-0.07	-0.08	0.05	-0.00	0.02
DA1	-0.11	-0.11	-0.11	-0.10	-0.12	-0.04	0.34	0.27	0.24	-0.03	-0.03	-0.07
DA2	-0.16	-0.15	-0.14	-0.12	-0.14	-0.07	0.27	0.37	0.26	-0.05	-0.03	-0.04
DA3	-0.18	-0.18	-0.13	-0.10	-0.14	-0.08	0.24	0.26	0.53	0.01	-0.01	-0.06
EBA	0.05	0.07	0.06	-0.01	0.08	0.05	-0.03	-0.05	0.01	0.51	0.23	0.40
ST	0.06	0.03	-0.04	-0.04	-0.04	-0.00	-0.03	-0.03	-0.01	0.23	1.26	0.43
MI	0.11	0.18	0.06	0.04	0.10	0.02	-0.07	-0.04	-0.06	0.40	0.43	1.00

Taulukko 1: Kovarianssimatriisi rakenneyhtälömallin muuttujista.

on koodissa käytetty nimeä "houghtonFull.cov". Kovarianssimatriisi on muodostettu Houghtonin ja Jinkersonin (2007, 50) artikkelissa annetusta korrelaatiomatriisista muuttujien keskihajontojen avulla, ja se on esitetty taulukossa 1. Lisäksi pelkkää kovarianssimatriisia käytettäessä, koodiin tarvitaan tieto otoksen koosta ( $n=263$ ). Mallin estimoinnissa on käytetty suurimman uskottavuuden menetelmää samoin kuin Houghton ja Jinkerson (2007) ovat käyttäneet. Suurimman uskottavuuden menetelmä vaatii oletuksen, että aineisto on likimain normaalijakautunut. Suurimman uskottavuuden estimaattori on oletusarvona lavaan-paketissa. Yhteenvedo sovitettun mallin keskeisistä tuloksista saadaan summary-funktiolla. Modifikaatioindeksit tulostuvat modindices-funktiolla.

```
1 fit <- sem(TTmalli, sample.cov = houghtonFull.cov, sample.nobs = 263)
2 summary(fit, fit.measures=TRUE, standardized=TRUE)
3 modindices(fit, standardized=TRUE, minimum.value=5, sort=TRUE)
```

Oletetun mallin sopivuutta aineistoon voidaan pitää melko hyvänä.  $\chi^2$ -testisuureen arvo on 64.407 vapausasteilla 49, ja testisuureen p-arvo on 0.069. P-arvo ei ole merkitsevä (5%:n merkitsevyystasolla), mikä tukee mallin sopimista aineistoon. Niin ikään sopivuusindeksit kertovat mallin sopivan hyvin aineistoon, sillä CFI = 0.985, TLI = 0.980, RMSEA = 0.035 ja SRMR = 0.041.

Taulukossa 2 on esitetty oletetun mallin modifikaatioindeksit. Kolmella ensimmäisellä sarakkeella on ilmoitettu kyseessä olevat parametrit: ensimmäisellä ja kolmannella muuttujien nimet ja keskimmaisella lavaan-paketin operaattori, joka kertoo kyseessä olevien muuttujien välisen yhteyden laadun. Neljännellä sarakkeella kerrotaan parametrin modifikaatioindeksi (MI) ja viimeisellä oletettu parametrin muutos (EPC). Jos mallin sovitusta halutaan jatkaa, niin tavanomaisesti valitaan parametri, jonka MI-arvo on suurin, ja lisätään tämä parametri seuraavaan malliin. Byrne (2012) suosittelee lisäämään parametrit, joiden modifikaatioindeksi on yli 30, yksitellen uuteen malliin. Tässä pitää kuitenkin ottaa huomioon, ettei tee mitään, joka on substanssiteorian vastaista. Samoin on huomioitava, ettei mallista tule liian monimutkainen. Esimerkkinä kerrottakoon, että Kline (2016, 346–347) samoin kuin Vehkalahti ja Everitt (2019, 336) ovat muokanneet mallia sallimalla FOR:n ja UF2:n korreloida keskenään. Se on järkevä ratkaisu, sillä FOR ja UF2 ovat saman faktorin muuttujia, ja muutenkin on oletettavaa, että mieliala ja onnelliseksi tuntema aika ovat yhteydessä toisiinsa. Tällä kertaan mallin sovitusta modifikaatioindeksien perusteella ei kuitenkaan jatketa, sillä parametrien MI-arvot eivät ole kovin suuria, joten mallin muokkaus näiden perusteella ei suuremmin paranna mallin sopivuutta aineistoon. Lisäksi

lhs	op	rhs	mi	epc
MI	~~	DA2	6.781	0.049
TA	=~	FOR	6.364	-0.229
FOR	~~	UF2	6.190	-0.043
EBA	~~	DA3	5.907	0.050
EBA	~~	FOR	5.034	-0.039

Taulukko 2: Oletetun mallin suurimmat modifikaatioindeksit.

sopivuusindeksit (CFI, TLI, RMSEA ja SRMR) kertovat jo hyvästä mallin sopivuudesta.

Viimeiseksi lopullisesta mallista on hyvä poistaa kaikki polut, jotka eivät ole tilastollisesti merkitseviä. Tässä tapauksessa rakentavien ajattelumallien ja työtyytyväisyyden välinen polku ei ollut merkitsevä (p-arvo 0.167), kuten Houghton ja Jinkerson (2007) olettivatkin (H6). Näin ollen poistetaan tämä polku seuraavasta mallista. Lisäksi rakentavien ajattelumallien ja toimimattomien ajattelutapojen välinen polku (p-arvo 0.078) sekä toimimattomien ajattelutapojen ja työtyytyväisyyden välinen polku (p-arvo 0.065) eivät olleet tilastollisesti merkitseviä. Nämä polut on kuitenkin jätetty seuraavaan malliin, koska näiden parametrien estimaattien p-arvot eivät olleet huomattavan suuria.

Oletetun mallin ja toisen mallin  $\chi^2$ -erotustestin tulos yhdellä vapausasteella on 1.906. Tulos ei ole tilastollisesti merkitsevä, joten poistettu polku (rakentavat ajattelumallit  $\rightarrow$  työtyytyväisyys) ei ollut mallin kannalta keskeinen, kuten voitiin olettaakin. Toisen mallin  $\chi^2_{50}$ -testisuureen arvo on 66.313, ja tämän p-arvo on 0.061. Hyvyysindekseistä CFI = 0.984, TLI = 0.979, RMSEA = 0.035 ja SRMR = 0.045. Näin ollen toisenkin mallin sopivuutta aineistoon voidaan pitää melko hyvänä.

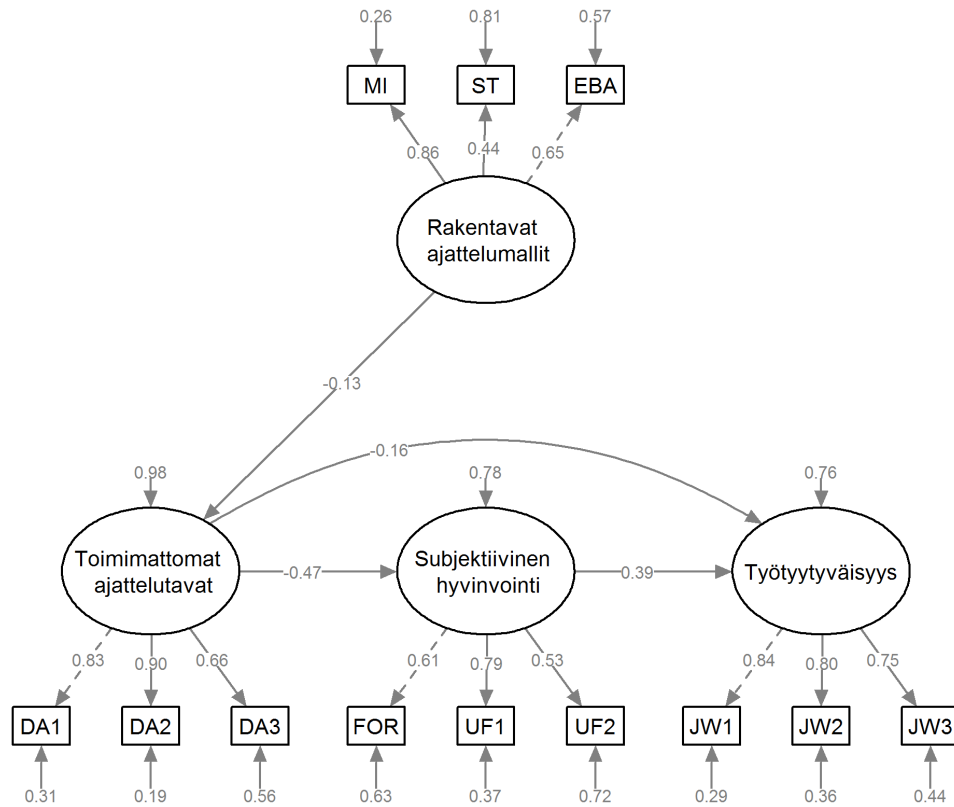
Toisen, ja samalla lopullisen, mallin rakentavien ajattelumallien ja toimimattomien ajattelutapojen välisen polkukertoimen standardoitu estimaatin arvo on  $-0.134$  ja p-arvo 0.071. Polku ei edelleenkään ole tilastollisesti merkitsevä, mutta se on jätetty malliin kahdesta syystä. Ensinnäkin p-arvo ei ole huomattavan suuri. Toiseksi mallissa on haluttu tutkia nimenomaan rakentavien ajattelumallien vaikutusta työtyytyväisyyteen. Jos rakentavien ajattelumallien ja toimimattomien ajattelutapojen välinen polku poistettaisiin, rakentavista ajattelumalleista ei lähtisi yhtään polkua mallin muihin faktoreihin, ja näin ollen rakentavat ajattelumallit -faktori poistettaisiin mallista kokonaan. Lopullisessa mallissa toimimattomien ajattelutapojen ja työtyytyväisyyden välisen polkukertoimen standardoitu estimaatti on  $-0.160$ , ja sen p-arvo on 0.047, joka juuri ja juuri alittaa kynnyksarvon 0.05. Taulukossa 3 on

				ei-standardoidut		standardoidut	
	lhs	op	rhs	est	se	est	se
mittausmallin polkukertoimet	RA	=~	EBA	1.000	0.000	0.653	0.064
	RA	=~	MI	1.861	0.331	0.863	0.072
	RA	=~	ST	1.060	0.178	0.438	0.062
	SH	=~	FOR	1.000	0.000	0.608	0.053
	SH	=~	UF1	1.768	0.242	0.795	0.050
	SH	=~	UF2	0.812	0.125	0.530	0.057
	TA	=~	DA1	1.000	0.000	0.833	0.029
	TA	=~	DA2	1.126	0.080	0.901	0.027
	TA	=~	DA3	0.991	0.089	0.661	0.040
	TT	=~	JW1	1.000	0.000	0.840	0.030
	TT	=~	JW2	1.031	0.081	0.799	0.032
	TT	=~	JW3	0.892	0.073	0.751	0.035
rakennemallin polkukertoimet	SH	~	TA	-0.332	0.062	-0.473	0.065
	TA	~	RA	-0.140	0.078	-0.134	0.073
	TT	~	SH	0.907	0.220	0.393	0.083
	TT	~	TA	-0.259	0.131	-0.160	0.080
havaittujen muuttujien varianssit	DA1	~~	DA1	0.105	0.016	0.307	0.049
	DA2	~~	DA2	0.070	0.017	0.189	0.048
	DA3	~~	DA3	0.300	0.029	0.564	0.053
	EBA	~~	EBA	0.289	0.043	0.574	0.084
	FOR	~~	FOR	0.198	0.022	0.630	0.065
	JW1	~~	JW1	0.259	0.042	0.295	0.050
	JW2	~~	JW2	0.372	0.050	0.361	0.051
	JW3	~~	JW3	0.382	0.044	0.437	0.052
	MI	~~	MI	0.255	0.124	0.256	0.125
	ST	~~	ST	1.017	0.097	0.808	0.054
	UF1	~~	UF1	0.212	0.044	0.368	0.079
	UF2	~~	UF2	0.197	0.020	0.720	0.060
latenttien muuttujien varianssit	RA	~~	RA	0.215	0.050	1.000	0.000
	SH	~~	SH	0.090	0.020	0.776	0.061
	TA	~~	TA	0.232	0.031	0.982	0.019
	TT	~~	TT	0.471	0.067	0.760	0.060

Taulukko 3: Lopullisen mallin ei-standardoidut ja standardoidut estimaatit (est) ja niiden keskivirheet (se).

kerrottu lopullisen mallin parametrien standardoimattomat ja standardoidut estimaatit (est), ja niiden keskivirheet (se). Kuvassa 6 on esitetty lopullisen





Kuva 6: Lopullisen mallin polkukaavio standardoituine estimaatteineen.

mallin polkukaavio standardoituine estimaatteineen. Kuvasta 6 voidaan nähdä, että rakentavien ajattelumallien ja toimimattomien ajattelutapojen sekä toimimattomien ajattelutapojen ja työtyytyväisyyden väliset polkukertoimet ovat lähempänä nollaa kuin muiden polkujen kertoimet.

## 4.5 Johtopäätökset

Houghtonin ja Jinkersonin (2007) esittämistä kuudesta hypoteesista H1–H5 pitivät hyvin paikkansa. Kuudennen hypoteesin paikkansapitävyys ei taas ol-

lut niin selvä. H6:n mukaan rakentavat ajattelumallit eivät vaikuttavat suoraan työtyytyväisyyteen vaan pelkästään välillisesti toimimattomien ajattelutapojen ja subjektiivisen hyvinvoinnin kautta. Mallia sovitettaessa huomattiin, että rakentavat ajattelumallit ei selvästikään vaikuta suoraan työtyytyväisyyteen, kuten H6:ssa oletettiin. Kuitenkaan rakentavien ajattelumallien yhteys työtyytyväisyyteen toimimattomien ajattelutapojen ja subjektiivisen hyvinvoinnin kautta ei myöskään ollut kovin vahva, sillä rakentavien ajattelumallien ja toimimattomien ajattelutapojen välisen polkukertoimen standardoitu estimaatti on  $-0.134$  ja p-arvo  $0.071$ .

Yhteenvedona voidaan sanoa: jos rakentavat ajattelumallit vaikuttavat työtyytyväisyyteen, se tapahtuu toimimattomien ajattelutapojen ja subjektiivisen hyvinvoinnin kautta. Tarkempaa tietoa muun muassa taustateoriansa, tuloksista ja johtopäätöksistä löytyy Houghtonin ja Jinkersonin (2007) artikkelista.

## 5 Yhteenveto

Tässä tutkielmassa esiteltiin kahta kausaalipäätelyn lähestymistapaa: Pearlin kausaaliteoriaa ja rakenneyhtälömallien teoriaa. Pearlin kausaaliteoriaan tutustuttaessa määritettiin muun muassa Pearlin kausaalimalli, kausaalivaikutus ja esitettiin graafisia menetelmiä kausaalivaikutuksen identifiointiin. Rakenneyhtälömalleja käsittelevässä luvussa esitettiin muun muassa rakenneyhtälöiden määritelmä LISREL-matriisimerkinnöillä sekä perehdyttiin rakenneyhtälömallien identifiointiin, estimointiin, sopivuuteen ja muokkaukseen. Lisäksi rakenneyhtälömallien sovittamista havainnollistettiin empiirisellä esimerkillä, jossa selvitettiin kognitiivisten prosessien vaikutusta työtyytyväisyyteen.

Wrightin polkumalleista lähti liikkeelle kaksi eri kausaalimallinnuksen suuntausta. Pearlin kausaalimalleja on totuttu soveltamaan epidemiologian puolella kun taas rakenneyhtälömalleja käyttäytymis- ja yhteiskuntatieteiden piirissä. Rakenneyhtälömallien vahvuutena on niiden soveltuvuus monimutkaisten teoriarakenteiden selvittämiseen. Rakenneyhtälömalleista on kuitenkin puuttunut rakenneyhtälöissä esiintyvän kausaalisen informaation käsittelyyn soveltuva matemaattinen kieli. Pearlin kausaaliteoria tarjoaa tämän kielen rakenneyhtälömallien kausaaliväittämien tueksi. (Pearl 2009, 170.) Hiljalleen tietoisuus Pearlin kausaalimalleista on yleistynyt rakenneyhtälömalleja soveltavien alojen piirissä (Hayduk ym. 2003; Kline 2016). Ehkäpä tulevaisuudessa nämä kaksi kausalisuuntausta lähenevät keskenään ja alkavat täydentämään toisiaan.

# Lähdeluettelo

- [1] Bock, R. D. 2007. Rethinking Thurstone. Teoksessa R. Cudeck & R. C. MacCallum (toim.) Factor analysis at 100. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 35–45.
- [2] Byrne, B. M. 2012. Structural equation modeling with Mplus: Basic concepts, applications, and programming. New York: Routledge.
- [3] Cudeck, R. 2007. Factor analysis in the year 2004: Still spry at 100. Teoksessa R. Cudeck & R. C. MacCallum (toim.) Factor analysis at 100. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 1–7.
- [4] Galles, D. & Pearl, J. 1998. An axiomatic characterization of causal counterfactuals. Foundations of Science, 3, 151–182.
- [5] Hayduk, L., Cummings, G., Skratkotter, R., Nimmo, M., Grygoryev, K., Dosman, D., Gillespie, M., Pazderka-Robinson, H. & Boadu, K. 2003. Pearl’s d-separation: One more step into causal thinking. Structural Equation Modeling, 10, 289–311.
- [6] Hopkins, B. 2004. Causality and development. Past, present and future. Teoksessa A. Peruzzi (toim.) Mind and causality. Amsterdam: John Benjamins Publishing Company, 1–17.
- [7] Houghton, J. D. & Jinkerson, D. L. 2007. Constructive thought strategies and job satisfaction: A preliminary examination. Journal of Business and Psychology, 22, 45–53.
- [8] Jöreskog, K. G. 2004. Factor analysis and its extensions. Viitattu 20.4.2017 <http://www.fa100.info/joreskog.pdf>
- [9] Jöreskog, K. G. 2007. Factor analysis and its extensions. Teoksessa R. Cudeck & R. C. MacCallum (toim.) Factor analysis at 100. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 47–77.
- [10] Ketokivi, M. 2015. Tilastollinen päättely ja tieteellinen argumentointi. Helsinki: Gaudeamus.
- [11] Kline, R. B. 2016. Principles and practice of structural equation modeling. 4th ed. New York: The Guilford Press. Kirjan nettisivut [www.guilford.com/kline](http://www.guilford.com/kline)

- [12] Koistinen, P. 2013. Todennäköisyyslaskenta. Luentomoniste 30.8.2013. Viitattu 17.9.2017 <https://courses.helsinki.fi/sites/default/files/course-material/4506346/tn13osa1.pdf>
- [13] Mustonen, S. 1995. Tilastolliset monimuuttujamenetelmät. Helsinki: Survo Systems.
- [14] Najaf, P. 2016. A macro-level analysis of traffic and pedestrian safety in urban areas. Viitattu 27.9.2018. [https://www.researchgate.net/figure/SEM-structure-112\\_fig2\\_fig314079682](https://www.researchgate.net/figure/SEM-structure-112_fig2_fig314079682)
- [15] Neck, C. P. & Manz, C. C. 1992. Thought self-leadership: The impact of self-talk and mental imagery on performance. *Journal of Organizational Behavior*, 12, 681–699.
- [16] Nummenmaa, L. 2004. Käyttäytymistieteiden tilastolliset menetelmät. Helsinki: Tammi.
- [17] Pearl, J. 2009. *Causality: Models, reasoning, and inference*. 2nd ed. New York: Cambridge University Press.
- [18] Pearl, J. 2012. The *do*-calculus revisited. Teoksessa N. de Freitas & K. Murphy (toim.) *Proceedings of the twenty-eighth conference on uncertainty in artificial intelligence*. Corvallis, OR: AUAI, 4-11
- [19] Pearl, J., Glymour, M. & Jewell, N. P. 2016. *Causal inference in statistics: A primer*. Chichester: Wiley.
- [20] Pearl, J. & Mackenzie, D. 2018. *The book of why: The new science of cause and effect*. New York: Basic Books.
- [21] Rosseel, Y. 2018. The lavaan tutorial. Viitattu 7.2.2019 <http://lavaan.ugent.be/tutorial/tutorial.pdf>
- [22] Schumacker, R. E. & Lomax, R. G. 2010. *A Beginner's guide to structural equation modeling*. 3rd ed. New York: Routledge.
- [23] Shpitser, I. & Pearl, J. 2006. Identification of conditional interventional distributions. Teoksessa R. Dechter & T. S. Richardson (toim.) *Proceedings of the twenty-second conference on uncertainty in artificial intelligence*. Corvallis, OR: AUAI, 437–444.
- [24] Stanton, J. M. 2001. Galton, Pearson, and the peas: A brief history of linear regression for statistics instructors. *Journal of Statistics Education*, 9, 1–13.

- [25] Tabachnick, B. G. & Fidell, L. S. 2007. Using multivariate statistics. 5th ed. Boston: Pearson Education.
- [26] Tikka, S. 2015. Kausaalivaikutuksen identifointi algoritmisesti. Pro gradu -tutkielma, Jyväskylän yliopisto. <https://jyx.jyu.fi/handle/123456789/45582>
- [27] Tikka, S. 2018. Improving identification algorithms in causal inference. Väitöskirja, Jyväskylän yliopisto. <https://jyx.jyu.fi/handle/123456789/59193>
- [28] Vehkalahti, K. 2008. Kyselytutkimuksen mittarit ja menetelmät. Helsinki: Tammi.
- [29] Vehkalahti, K. Everitt, B. S. 2019. Multivariate analysis for the behavioral sciences. 2nd ed. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC.